**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ**
**ПО КОНКУРСНОЙ ГРУППЕ**
**«ФПМИ КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ НАУКИ»**
**ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В АСПИРАНТУРУ**

На вступительном испытании будут заданы вопросы по выпускной квалификационной работе и вопросы из раздела, соответствующего направлению будущей научно-исследовательской деятельности поступающего.

**Вопросы по выпускной квалификационной работе (магистратура или специалитет)**

1. Основные положения.
2. Новизна.
3. Актуальность.

**Вопросы для разделов:**

- **«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»**
- **«Вычислительная математика»**

**Математический анализ**

1. Пределы последовательности. Критерий Коши. Существование предела у монотонно возрастающей ограниченной сверху последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрассе о существовании сходящейся подпоследовательности у ограниченной последовательности.
2. Числовые ряды. Критерий Коши. Признаки сходимости (признаки сравнения, признак Даламбера, признак Лейбница, признак Дирихле).
3. Предел функции. Непрерывные функции. Свойства непрерывных функций на отрезке (теоремы Вейерштрасса об ограниченности и достижимости верхней и нижней грани. Теорема Коши о промежуточных значениях). Обобщения на многомерный случай. Существование односторонних пределов у монотонных функций. Теорема о непрерывности обратной функции и непрерывной монотонной. Равномерная непрерывность.
4. Дифференцируемые функции одной и нескольких переменных. Производные и дифференциал. Формула Тейлора для функций (одной и нескольких переменных). Ряды Тейлора. Элементарные функции. Теорема о неявных функциях (без доказательства).
5. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора. Достаточные условия монотонности дифференцируемой функции. Выпуклые функции. Достаточные условия выпуклости функции два раза дифференцируемой на интервале. Асимптоты.
6. Экстремумы функций одной и нескольких переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума для дифференцируемых функций.
7. Интеграл Римана. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функции по Риману. Теорема о среднем. Первообразная формула Лейбница-Ньютона. Формула интегрирования по частям. Несобственные интегралы. Признаки сходимости несобственных интегралов. Признак Дирихле.
8. Понятие кратного интеграла по Риману. Сведение кратного интеграла к повторному. Замена переменных в кратных интегралах.
9. Понятие гладкой кривой, гладкой поверхности, их параметрическое задание. Определение длины кривой, площади куска поверхности. Криволинейные интегралы первого и второго рода. Поверхностные интегралы первого и второго рода.
10. Формула Грина на плоскости. Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса. Дифференциальные операции. Градиент, дивергенция, ротор (вихрь). Криволинейные

интегралы не зависящие от пути интегрирования. Потенциальные векторные поля. Полный дифференциал, необходимые условия, достаточные условия.

11. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости непрерывных функций. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов.
12. Интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Теоремы о непрерывности и дифференцируемости интегралов, зависящих от параметра.
13. Ряды Фурье по тригонометрической системе. Сходимость рядов Фурье для кусочно-гладких функций. Порядок убывания коэффициентов Фурье для l-раз непрерывно-дифференцируемой функции. Равномерная сходимость ряда Фурье для непрерывно-дифференцируемой функции. Равномерное приближение непрерывных функций на отрезке тригонометрическими полиномами и многочленами.
14. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Басселя и равенство Парсеваля. Понятие гильбертова пространства и абстрактных рядов Фурье по полной ортонормированной системе. Теорема о сходимости и среднем рядов Фурье по тригонометрической системе для функции, интегрируемой с квадратом на отрезке.
15. Преобразования Фурье. Формула обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

**Линейная алгебра**

1. Понятие линейного пространства. Определение линейно зависимости и независимости векторов. Размерность линейного пространства. Базис, координаты вектора, формулы преобразования координат при переходе от одного базиса к другому.
2. Матрицы и действия над ними. Детерминант квадратной матрицы. Ранг матрицы. Эквивалентность его двух определений в терминах линейной независимости строк (или столбцов) матрицы и в терминах неравенства нулю миноров.
3. Системы линейных алгебраических уравнений. Решение однородной системы. Решение неоднородной системы линейных уравнений. Критерий совместности Кронекера-Капелли.
4. Линейные преобразования в n-мерном пространстве. Матрица линейного преобразования и её смысл. Изменение матрицы линейного преобразования при замене базиса. Область значений линейного преобразования и его матрица. Произведение линейных преобразований.
5. Собственные векторы и собственные числа линейного преобразования. Характеристический многочлен. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Матрица линейного преобразования в базисе из собственных векторов. Жорданов базис линейного преобразования и Жорданова нормальная форма (без доказательства).
6. Скалярное произведение в Эвклидовом пространства. Координатное представление скалярного произведения. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации.
7. Понятие самосопряженного линейного преобразования. Свойства его собственных значений и собственных векторов. Матрица самосопряженного преобразования.
8. Ортогональные преобразования. Матрица ортогонального преобразования. Ортогональные матрицы. Переход от одного ортогонального базиса к другому.
9. Билинейные и квадратичные формы. Их матрицы и формулы перехода от одного базиса к другому. Проведение квадратичной формы к каноническому виду в ортонормированном базисе. Закон инерции для квадратичных форм. Понятие положительно определенной квадратичной формы. Критерий Сильвестра (без доказательства).

**Обыкновенные дифференциальные уравнения**

1. Элементарные методы интегрирования уравнений первого порядка (уравнения с разделяющими переменными, однородные уравнения, линейные уравнения, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах).
2. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения 1-го порядка и для системы n уравнений 1-го порядка с n неизвестными в нормальной форме (без доказательства). Специфика случая линейных дифференциальных уравнений.
3. Линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения со специальной правой частью в виде квазиполинома. Уравнение Эйлера.
4. Решение однородной системы первого порядка с постоянными коэффициентами (случай простых корней).
5. Линейные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений однородного уравнения и е ё существование. Определитель Вронского. Формула Лиувилля. Возможность понижения порядка однородного уравнения. Решение однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения. Метод вариаций произвольных постоянных.
6. Системы линейных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений однородной системы и её существование. Формула Лиувилля. Метод вариаций произвольных постоянных отысканий частного решения неоднородной системы. Структура общего решения.
7. Понятие об уравнениях, не разрешенных относительно старшей производной. Особое решение.
8. Автономные системы. Положение равновесия. Фазовая плоскость и фазовые траектории. Классификация положений равновесия на плоскости. Понятие устойчивости положения равновесия по Ляпунову и асимтотической устойчивости. Теория об устойчивости по линейному приближению.
9. Первые интегралы автономной системы. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка. Общий вид решения. Задача Коши. Понятие характеристики.
10. Элементы вариационного исчисления. Простейшая задача вариационного исчисления и её несложные обобщения. Вариационная задача при наличии ограничений, изопериметрическая задача.

**Теория функций комплексного переменного**

1. Функция одной комплексной переменной. Дифференцируемые функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексной переменной.
2. Равенство нулю интеграла от дифференцируемой функции по замкнутому контуру, стягивающемуся в точку. Интегральная форма Коши.
3. Понятие функции регулярной в точке и в области. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Круг сходимости степенного ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Эквивалентность дифференцируемости и регулярности функции и области. Регулярность равномерно сходящегося ряда и регулярных функций.
4. Разложение в ряд Тейлора функции, дифференцируемой в окрестности точки. Ряд Лорана. Элементарные функции $Z^n$, $e^Z$, $Sin\ Z$, $Cos\ Z$, $Sh\ Z$, $Ch\ Z$ и т.д.
5. Изолированные особые точки однозначного характера. Классификация: устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка. Характеризация особой точки функции в терминах коэффициентов ряда Лорана.

6. Понятие вычета в изолированной особой точке однозначного характера. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов.
7. Разложение мероморфных функций на элементарные дроби. Бесконечные произведения. Примеры разложения некоторых целых функций в бесконечные произведения.
8. Теорема единственности регулярной функции, принимающей заданные значения на последовательности точек, предел которой содержится в области регулярности. Аналитическое продолжение. Понятие полной аналитической функции. Основные многозначные элементарные функции $\sqrt[n]{Z}$, $ln\ Z$. Понятие о римановой поверхности.
9. Конформные отображения, осуществляемые регулярными функциями. Понятие однолистного отображения. Дробно-линейные отображения и их свойства. Отображения, осуществляемые с помощью некоторых элементарных функций. Общая теорема Римана о существовании конформных отображений (без доказательства). Принцип соответствия границ при конформном отображении.

**Уравнения математической физики**

1. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных 2-го порядка. Приведение к каноническому виду в точке. Классификация уравнений. Эллиптические, гиперболические и параболические уравнения.
2. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка на плоскости. Понятие характеристики. Приведение к каноническому виду в области. Задачи Коши. Теорема Коши-Ковалевской (без доказательства).
3. Понятие корректной краевой задачи для уравнения в частных производных. Примеры некоторых задач (задачи Коши для уравнения Лапласа). Постановка классических задач математической физики и их физический смысл (задача Коши и смешанная задача для уравнения колебания струны, для уравнения теплопроводности, задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа).
4. Интегральные уравнения Фредгольма. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Теорема Фредгольма для интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывным ядром (без доказательства). Обобщение на случай полярных ядер. Метод последовательных приближений и ряд Неймана.
5. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Собственные значения и собственные функции, их свойства. Теорема Гильберта-Шмидта о разложении истокообразно представимой функции в ряд по собственным функциям ядра (без доказательства).
6. Задача Штурма-Лиувилля. Функция Грина краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.
7. Задача Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера в случае уравнения колебания струны. Существование и единственность решения. Область зависимости решения от начальных данных.
8. Смешанные задачи для гиперболических уравнений. Метод Фурье (метод разделения переменных). Единственность решения.
9. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Теорема существования и единственности. Формула Пуассона. Фундаментальное решение и его смысл.
10. Смешанная задача для уравнения теплопроводности. Метод Фурье (метод разделения переменных). Единственность решения, принцип максимума.
11. Уравнение Лапласа и Пуассона. Гармонические функции и их свойства. Формулы Грина. Теорема о среднем для гармонических функций. Принцип максимума и минимума для гармонических функций.

12. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Фундаментальное решение. Понятие функции Грина для задачи Дирихле. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге методом Фурье. Существование и единственность решения задачи Дирихле в общем случае (без доказательства).
13. Задача Неймана для уравнения Лапласа и Пуассона. Необходимые и достаточные условия её разрешимости. Степень неопределённости решения.

## Литература


**Математический анализ**

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 1 и т. 2.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа, т. 1 и т. 2.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференицального и интегрального исчисления, т. 1, т. 2 и т. 3.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. 1 и т. 2.

**Линейная алгебра**

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
2. Гельфонд И.М. Лекции по линейной алгебре.
3. Курош Л.Г. Курс высшей алгебры.

**Обыкновенные дифференциальные уравнения**

1. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. 2.

**Теория функций комплексного переменного**

1. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И., Лекции по теории функций комплексного переменного.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.
3. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного.
4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций т. 1. и т. 2.

**Уравнения математической физики**

1. Тихонов В.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.
2. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики т. 2 и т. 4.

**Вопросы для разделов:**

- **«Дискретная математика и математическая кибернетика»**
- **«Системный анализ, управление и обработка информации (по отраслям)»**
- **«Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей»**
- **«Теоретические основы информатики»**

1. **Математическое программирование**
   Выпуклые множества, выпуклые функции, сильно выпуклые функции, их свойства. Правило множителей Лагранжа. Теорема Куна-Таккера, двойственная задача, ее свойства. Метод проекции градиента Метод Ньютона. Метод покоординатного спуска. Метод штрафных функций. Метод барьерных функций. Метод динамического программирования. Линейное программирование. Симплекс-метод. Двойственные задачи линейного программирования.

2. **Исследование операций, теория игр**
   Антагонистические игры. Матричные игры, теорема о минимаксе. Выпукло-вогнутые антагонистические игры. Теорема существования седловой точки. Бескоалиционные игры $n$ лиц. Равновесие по Нэшу. Принцип гарантированного результата. Минимаксные задачи. Многокритериальная оптимизация. Оптимальность по Парето. Лексикографический подход.

3. **Оптимальное управление**
   Постановка задач оптимального управления, их классификация. Принцип максимума Понтрягина. Краевая задача принципа максимума. Линейная задача быстродействия, ее свойства (существование решения, число переключений). Принцип максимума и вариационное исчисление.

4. **Дискретная оптимизация**
   Целочисленное линейное программирование (метод Гомори, свойства унимодулярности матрицы ограничений). Метод ветвей и границ (на примере задач целочисленного или булева линейного программирования). Временная сложность решения задач дискретной оптимизации. Основные классы сложности ($P$, $NP$, $NPC$). $NP$-трудные задачи (задача о рюкзаке, задача коммивояжера).

5. **Теория функциональных систем**
   Проблема полноты. Теорема о полноте систем функций двузначной логики $P_2$. Автоматы. Регулярные события и их представление в автоматах. Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для автоматов. Вычислимые функции. Эквивалентность класса рекурсивных функций и класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга. Алгоритмическая неразрешимость проблемы эквивалентности слов в ассоциативных исчислениях.

6. **Алгебра логики, комбинаторный анализ и теория графов**
   Эквивалентные преобразования формул двузначной логики $P_2$. Основные комбинаторные числа. Метод включений – исключений. Графы и сети. Оценки числа графов и сетей различных типов. Эйлеровы и гамильтоновы графы.

7. **Управляющие системы**
   Понятие управляющей системы. Основные модельные классы управляющих систем: дизъюнктивные нормальные формы, формулы, контактные схемы, схемы из

функциональных элементов, автоматы, машины Тьюринга, операторные алгоритмы. Основные проблемы теории управляющих систем.

8. **Дизъюнктивные нормальные формы**
   Проблема минимизации булевых функций. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ). Постановка задачи в геометрической форме. Локальные алгоритмы построения ДНФ. Построение ДНФ $\sum T$ (сумма тупиковых) с помощью локального алгоритма.

9. **Интеллектуальные системы**
   Декларативное представление знаний: фреймы, семантические сети, онтологии. Процедурное представление знаний: продукционная система. Эвристические методы поиска: пространство состояний, жадный поиск, A*, лучевой поиск. Эвристические методы поиска: градиентный спуск, имитация отжига, генетические алгоритмы. Инженерия знаний: работа с экспертами, отладка базы знаний. Машинное обучение: обучающая и тестовая выборка, переобучение, байесовские и оптимизационные методы.

10. **Архитектура ПО**
    Разработка архитектуры программного обеспечения: Классы и интерфейсы в объектно-ориентированном программировании. Разработка архитектуры программного обеспечения: Проектирование классов: наследование и агрегация, обобщенное программирование. Разработка архитектуры программного обеспечения: Паттерны проектирования классов. Паттерны Factory, Singleton, Wrapper и Adapter.

11. **Машинное обучение**
    Машина опорных векторов. Существование и единственность решений. Нелинейное обобщение. Статистический подход к обучению, средний и эмпирический риск. Байесовское оптимальное решение. Настройка параметров распознавателей, перекрестный и скользящий контроль. Переобучение. Бустинг, алгоритм AdaBoost. Линейные классификаторы со штрафными функциями, постановка задачи. Варианты линейных классификаторов. Вероятностные линейные классификаторы. Линейный дискриминант Фишера. Логистическая регрессия.

12. **Статистический анализ данных**
    Базовые понятия математической статистики: статистическая гипотеза, статистика критерия, фактический уровень значимости. Критерии согласия: проверка равномерности, показательности, нормальности. Модели и методы проверки однородности выборок. Однофакторная и двухфакторная модели дисперсионного анализа. Критерии для упорядоченных альтернатив. Критерий хи-квадрат. Алгоритмы кластер-анализа: кратчайший незамкнутый путь, метод k-средних, алгоритм «Форель». Иерархические процедуры. Дендрограммы. Коэффициенты корреляции Пирсона и Спирмена. Метод главных компонент. Доверительный эллипсоид. Частная корреляция. Линейная регрессионная модель. Методы исследования регрессионных остатков. Процедура пошаговой регрессии.

13. **Формальные языки, парсеры**
    Алгоритмы синтаксического анализа для КС-грамматик (алгоритмы CYK и Earley). Алгоритм Эйснера. Детерминированный синтаксический анализ для деревьев зависимостей.

14. **Онтологии**
Понятие «инженерной онтологии», его история и основные определения, связанные с ним (концепт, экземпляр, атрибут). Наследование концептов и онтологий. Формальные представления онтологий в IT. Языки RDF, RDFS, OWL, их основные классы. Теоретико-множественный подход к построению онтологий (BORO-метод), его основные преимущества и недостатки.

15. **Основные задачи и методы автоматической обработки текста**
Статистический машинный перевод. Основное уравнение перевода. Модели перевода: пословная, фразовая, синтаксическая. Модель языка (гладкость перевода). Основные проблемы распознавания именованных сущностей. Компьютерная морфология в различных задачах NLP. Методы дедупликации текстов.

16. **Грамматическая система естественного языка**
Приведите примеры из известных вам языков, в которых установление разных наборов недревесных связей приводит к разным интерпретациям. Каковы основные элементы описания недревесных связей в системе автоматической обработки текста? Каковы основные проблемы при поиске контролера для недревесной связи в случае контроля рефлексивов и местоимений третьего лица? Приведите примеры из известных вам языков.
Дайте определения и/или примеры для следующих терминов: *словоформа, лексема, морф, морфема; словоизменение, словообразование*. Дайте определения и/или примеры для следующих терминов: *грамматическая категория, граммема, грамматический показатель, (морфологическая) парадигма*. Дайте определения и/или примеры для следующих терминов: *семантическая валентность*, *синтаксическая валентность*, *партиципант* (= участник ситуации), *синтаксический актант* (= argument), *сирконстант* (adjunct), *семантическая роль, синтаксическая функция, диатеза*. Дайте определения и/или примеры: *грамматика составляющих, грамматика зависимостей, непроективная структура зависимостей; синтаксическая (= структурная) неоднозначность*. Перечислите, сколько сможете вспомнить: *части речи* (глагол, существительное, …); *типы составляющих* (VP, NP, …); *семантические роли* (Агент, …); *синтаксические функции* (подлежащее, прямое дополнение, …).

## Литература


1. Рассел, Норвиг. Искусственный интелект: современный подход.
2. Саймон Хайкин. Нейронные сети: полный курс.
3. Хасти, Тибширани, Фридман. Элементы статистического обучения.
4. Бишоп. Распознавание образов и машинное обучение
5. Лагутин. Наглядная математическая статистика
6. М. А. Кронгауз. Семантика.
7. Дж. Лайонз. Язык и лингвистика: Вводный курс.
8. В. А. Плунгян. Общая морфология: Введение в проблематику.
9. Я. Г. Тестелец. Введение в общий синтаксис.
10. А. Я. Шайкевич. Введение в лингвистику.
11. Manning, Schütze, Foundations of Statistical Natural Language Processing
12. Jurafsky, Martin, Speech and Language Processing
13. Koehn, Statistical Machine Translation
14. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высш. школа, 2001.
15. Журавлев Ю.И., Флеров Ю.А. Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов: Учеб. пособие. – М.: МФТИ, 1999.

16. Журавлёв Ю.И., Флёров Ю.А., Вялый М.Н. Дискретный анализ, ч. III. Формальные системы и алгоритмы: учебное пособие. – М.: ООО Контакт Плюс, 2010.
17. Теория и реализация языков программирования. Учебное пособие. /В.А. Серебряков, М.П. Галочкин, Д.Р. Гончар, М.Г. Фуругян. – М.: МЗ-Пресс, 2003.
18. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.
19. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 2000.
20. Тихомиров В.М., Фомин С.В., Алексеев В.М. Оптимальное управление. М.: Наука, 2003.
21. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. М.: Фазис, 2002.
22. Морозов В.В. Основы теории игр. М.: Изд-во МГУ, 2002.