Приложение 1.1
УТВЕРЖДЕНО
приказом МФТИ
от 11.12.2019 г. № 2094-1

Программа вступительного испытания по математике
для восстановления после отчисления и перевода из других организаций в МФТИ

Процедура проведения вступительного испытания

Форма проведения

Вступительное испытание по математике проводится с совмещением письменной и устной форм.

Порядок проведения

1. Испытание проводится в соответствии с установленным приказом МФТИ графиком.
2. К испытанию допускаются лица, имеющие на руках действующий экзаменационный лист, выданный приёмной комиссией.
3. Письменная часть испытания проводится в специально отведённой аудитории в течение двух астрономических часов.
4. Работа выполняется на специальных бланках, выданных экзаменаторами.
5. Во время проведения вступительного испытания категорически запрещается: пользоваться литературой, средствами связи, любыми электронными устройствами (включая калькуляторы). В случае нарушения порядка проведения вступительного испытания поступающий немедленно удаляется со вступительного испытания, в ведомости ставится оценка «неудовлетворительно».
6. Билет письменной части для поступающих только на направление подготовки 27.03.03 Системный анализ и управление содержит задачи по темам, указанным в программе:
   - Для поступающих на 2-ой семестр: разделы I, II.
   - Для поступающих на 3-ий семестр: разделы I, II, III, IV.
   - Для поступающих на 4-ый-8-ой семестры: разделы I, II, III, IV, V, VI.
7. Билет письменной части для поступающих на англоязычные программы “Aerospace Engineering”, “Biomedical Engineering” и “Computer Science” содержит задачи по темам, указанным в соответствующей программе на английском языке.
8. Билет письменной части для поступающих на другие направления подготовки и программы содержит задачи по темам, указанным в программе:
   - Для поступающих на 2-ой семестр: разделы I, II.
   - Для поступающих на 3-ий семестр: разделы I, II, III, IV.
   - Для поступающих на 4-ый семестр: разделы I, II, III, IV, V, VI.

- Для поступающих на 5-ый семестр: разделы I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII.
- Для поступающих на 6-ой семестр: разделы I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX.
- Для поступающих на 7-ой семестр: разделы I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X.
- Для поступающих на 8-ой семестр: разделы I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI.

9. После проведения письменной части испытания и проверки работ проводится устная часть вступительного испытания, включающая в себя обсуждение письменной части работы с каждым поступающим.
10. Во время устной части преподаватели имеют право задать поступающим на направление подготовки 27.03.03 Системный анализ и управление дополнительные вопросы по темам, указанным в программе:
    - Для поступающих на 2-ой семестр: разделы I, II.
    - Для поступающих на 3-ий семестр: разделы I, II, III, IV.
    - Для поступающих на 4-ый-8-ой семестры: разделы I, II, III, IV, V, VI.
11. Во время устной части преподаватели имеют право задать поступающим на англоязычные программы “Aerospace Engineering”, “Biomedical Engineering” и “Computer Science” дополнительные вопросы по темам, указанным в соответствующей программе на английском языке.
12. Во время устной части преподаватели имеют право задать поступающим на другие направления подготовки и программы дополнительные вопросы по темам, указанным в программе:
    - Для поступающих на 2-ой семестр: разделы I, II.
    - Для поступающих на 3-ий семестр: разделы I, II, III, IV.
    - Для поступающих на 4-ый семестр: разделы I, II, III, IV, V, VI.
    - Для поступающих на 5-ый семестр: разделы I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII.
    - Для поступающих на 6-ой семестр: разделы I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX.
    - Для поступающих на 7-ой семестр: разделы I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X.
    - Для поступающих на 8-ой семестр: разделы I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI.
13. По результатам письменной работы и устного обсуждения выставляется оценка по десятибалльной шкале: 0 – 2 (неудовлетворительно), 3-4 (удовлетворительно), 5-7 (хорошо), 8-10 (отлично).

Программа вступительного испытания по математике

I. Введение в математический анализ

1. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число e. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Бесконечно большие последовательности и их свойства.
2. Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
3. Предел функции одной переменной. Определения по Гейне и по Коши, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Различные типы пределов. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменной под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонной функции.
4. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Односторонняя непрерывность. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.
5. Свойства функций, непрерывных на отрезке — ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема об обратной функции.
6. Непрерывность элементарных функций. Определение показательной функции. Свойства показательной функции. Замечательные пределы, следствия из них.
7. Сравнение величин (символы o, O, $\sim$). Вычисление пределов при помощи выделения главной части в числителе и знаменателе дроби.
8. Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной.
9. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменной. Дифференциалы высших порядков.
10. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.
11. Применение производной к исследованию функций. Необходимые и достаточные условия монотонности, достаточные условия локального экстремума в терминах первой производной. Достаточные условия локального экстремума в терминах второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Построение графиков функций

— асимптоты, исследование интервалов монотонности и точек локального экстремума, интервалов выпуклости и точек перегиба.

12. Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность неопределенного интеграла, интегрирование подстановкой и по частям. Интегрирование рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных и трансцендентных функций.
13. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкие кривые, касательная к гладкой кривой. Теорема Лагранжа для вектор-функций. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления.
14. Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Извлечение корня. Экспонента с комплексным показателем. Формула Эйлера. Информация об основной теореме алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и неприводимые квадратичные множители. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей.

II. Аналитическая геометрия

1. Матрицы. Операции сложения и умножения матриц на числа. Детерминанты (определители) квадратных матриц 2-го и 3-го порядков.
2. Векторы и действия над ними. Операции сложения векторов и умножения на числа, их свойства. Понятие о линейных пространствах и их основных свойствах.
3. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базис, координаты векторов в базисе. Координатное представление векторов. Операции с векторами в координатном представлении. Изменение координат вектора при замене базиса. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов в координатной форме.
4. Общая декартова и прямоугольная системы координат. Изменение координат точки при замене системы координат. Матрица перехода и ее свойства. Формулы перехода между прямоугольными системами координат на плоскости.
5. Ортогональные проекции векторов и их свойства. Скалярное произведение, его свойства, выражение в координатах. Геометрический смысл скалярного произведения. Формулы для определения расстояния между двумя точками и угла между двумя направлениями.
6. Ориентированные тройки векторов. Векторное произведение, его свойства, выражение в ортонормированном базисе. Условие коллинеарности векторов. Геометрический смысл векторного произведения. Выражение векторного произведения в произвольном базисе. Формула двойного векторного произведения.
7. Смешанное произведение векторов, его свойства, выражение в произвольном и ортонормированном базисах. Геометрический смысл смешанного произведения. Условие компланарности векторов. Взаимный базис.
8. Прямая на плоскости и в пространстве. Способы задания прямой на плоскости и в пространстве. Плоскость в пространстве. Способы задания плоскости в пространстве. Позиционные и метрические задачи о прямых и плоскостях в пространстве. Перевод

одной формы описания прямых и плоскостей в пространстве в другую форму. Пучок прямых. Пучок и связка плоскостей.

9. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе. Центральные линии.
10. Эллипсоиды, гиперболоиды и параболоиды. Их основные свойства. Прямолинейные образующие. Цилиндры и конусы. Поверхности вращения. Классификация и канонические уравнения алгебраических поверхностей 2-го порядка.
11. Отображения и преобразования плоскости. Композиция (произведение) отображений. Взаимно однозначное (биективное) отображение. Обратное отображение. Линейные преобразования плоскости и их свойства. Координатное представление линейных преобразований плоскости.
12. Аффинные преобразования и их свойства. Главные направления аффинного преобразования и их нахождение. Геометрический смысл модуля и знака определителя матрицы аффинного преобразования. Аффинная классификация линий 2-го порядка на плоскости.
13. Ортогональные преобразования и их свойства. Разложение аффинного преобразования в произведение ортогонального и двух сжатий.
14. Умножение и обращение матриц. Ортогональные матрицы. Элементарные преобразования матриц. Матричная форма элементарных преобразований.
15. Определение и основные свойства детерминантов (определителей) матриц. Миноры, алгебраические дополнения, разложение детерминанта (определителя) по элементам строки или столбца. Формула полного разложения детерминанта (определителя) и ее следствия. Детерминант (определитель) произведения матриц.

III. Многомерный анализ, интегралы и ряды

1. Точечное n-мерное пространство. Расстояние между точками, его свойства. Предел последовательности точек в n-мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано—Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества, точки прикосновения. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.
2. Предел числовой функции нескольких переменных. Определения в терминах окрестностей и в терминах последовательностей. Предел функции по множеству. Пределы по направлениям. Повторные пределы. Исследование предела функции двух переменных при помощи перехода к полярным координатам.
3. Непрерывность функции нескольких переменных. Непрерывность по множеству. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость (точных) нижней и верхней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.
4. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала

относительно замены переменных. Градиент, его независимость от выбора прямоугольной системы координат. Производная по направлению.

5. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.
6. Мера Жордана в n-мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана.
7. Определенный интеграл Римана. Суммы Римана, суммы Дарбу, критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, интегрируемость монотонной функции, интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Свойства интегрируемых функций: аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона—Лейбница. Интегрирование подстановкой и по частям в определенном интеграле.
8. Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения.
9. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства. Ориентация гладкой кривой. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
10. Несобственный интеграл (случай неограниченной функции и случай бесконечного промежутка интегрирования). Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций. Признаки сходимости. Интегралы от знакопеременных функций: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.
11. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признаки сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля.
12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признаки Дирихле и Абеля.
13. Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши—Адамара для радиуса сходимости. Непрерывность суммы комплексного степенного ряда.
14. Степенные ряды с действительными членами. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Пример бесконечно дифференцируемой

функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций. Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции e^z.

IV. Линейная алгебра

1. Обратная матрица. Условия обратимости матрицы. Формулы для элементов обратной матрицы.
2. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.
3. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера—Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Метод Гаусса. Теорема Фредгольма.
4. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Базис и размерность.
5. Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве. Матрица перехода.
6. Подпространства и способы их задания в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула размерности суммы подпространств.
7. Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и образ линейного отображения. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений.
8. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в матричной форме. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.
9. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.
10. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение. Его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования.
11. Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.
12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема инерции для квадратичных форм. Знакоопредел¨енные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
13. Приведение квадратичной формы к диагональному виду эле- ментарными преобразованиями. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши—Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.
14. Конечномерное евклидово пространство. Ортогонализация базиса. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства.

15. Линейные преобразования евклидова пространства. Ортогональное проектирование на подпространство. Сопряженные преобразования, их свойства. Матрица сопряженного преобразования.
16. Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования.
17. Ортогональные преобразования. Их свойства. Ортогональные матрицы.
18. Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства.
19. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределенной.

V. Кратные интегралы и теория поля

1. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением.
2. Экстремумы функций многих переменных: необходимое условие, достаточное условие. Условный экстремум функции многих переменных при наличии связей: исследование при помощи функции Лагранжа. Необходимые условия. Достаточные условия.
3. Кратный интеграл Римана. Суммы Римана и суммы Дарбу. Критерии интегрируемости. Интегрируемость функции, непрерывной на измеримом компакте. Свойства интегрируемых функций: линейность интеграла, аддитивность интеграла по множествам, интегрирование неравенств, теоремы о среднем, непрерывность интеграла. Сведение кратного интеграла к повторному.
4. Формула Грина. Потенциальные векторные поля на плоскости. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.
5. Геометрический смысл модуля и знака якобиана отображения двумерных пространств. Теорема о замене переменных в кратном интеграле.
6. Простая гладкая поверхность. Поверхностный интеграл первого рода. Независимость интеграла от параметризации поверхности при допустимой замене параметров. Площадь поверхности. Ориентация простой гладкой поверхности. Поверхностный интеграл второго рода. Независимость интеграла от параметризации поверхности при допустимой замене параметров. Кусочно-гладкие поверхности, их ориентация и интегралы по ним.
7. Формула Гаусса—Остроградского. Дивергенция векторного поля, ее независимость от выбора прямоугольной системы координат и геометрический смысл. Соленоидальные векторные поля. Связь соленоидальности с обращением в нуль дивергенции поля.
8. Формула Стокса. Ротор векторного поля, его независимость от выбора прямоугольной системы координат и геометрический смысл. Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Связь потенциальности с обращением в нуль ротора поля.
9. Оператор ∇ и действия с ним. Основные соотношения, содержащие вектор ∇.

VI. Дифференциальные уравнения 1

1. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнение Бернулли или Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Методы понижения порядка дифференциальных уравнений.
2. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения в случае, когда правая часть уравнения является квазимногочленом. Уравнение Эйлера.
3. Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы коэффициентов системы. Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы коэффициентов системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда свободные члены уравнения являются квазимногочленами.
4. Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений.

VII. Гармонический анализ

1. Лемма Римана об осцилляции. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций, стремление их коэффициентов к нулю. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации. Достаточные условия сходимости рядов Фурье в точке. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Ряд Фурье в комплексной форме.
2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
3. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства $C[a;b]$. Неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных нормированных пространствах.
4. Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортономированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированным ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.

5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля. Полнота системы полиномов Лежандра.
6. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости, признак Вейерштрасса. Признак Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению определенных интегралов. Интегралы Дирихле и Лапласа.
7. Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства: непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

VIII. Дифференциальные уравнения 2

1. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами. Необходимые условие слабого локального экстермума, уравнение Эйлера.
2. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде. Особое решение.
3. Автономные системы дифференциальных уравнений. Основные понятия и свойства фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем уравнений второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем уравнений.
4. Первые интегралы и линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка. Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов. Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
5. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальных линейных систем уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде. Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы уравнений. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной системы уравнений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля—Остроградского. Метод вариации постоянных или формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n-го порядка.
6. Теорема Штурма и следствия из нее. Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений.

IX. Теория функций комплексного переменного

1. Комплексные числа. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана. Последовательности и ряды. Понятие функции комплексного переменного. Непрерывные функции.
2. Дифференцирование по комплексному переменному. Условия Коши—Римана. Понятие функции, регулярной в области. Сопряженные гармонические функции двух переменных.
3. Элементарные функции комплексного переменного: степенная, рациональная, показательная и тригонометрическая, их свойства. Теорема об обратной функции. Понятие о многозначной функции и ее регулярных ветвях. Главные регулярные ветви многозначных функций $\sqrt[n]{z}$ и $\mathrm{Ln}z$.
4. Интегрирование по комплексному переменному. Свойства интеграла от непрерывной кривой по кусочно-гладкому контуру. Интегральная теорема Коши для регулярных функций.
5. Интегральная формула Коши (интеграл Коши). Интеграл типа Коши, его регулярность.
6. Первообразная. Достаточное условие существования первообразной. Формула Ньютона— Лейбница.
7. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Радиус и круг сходимости степенного ряда. Разложение в степенной ряд функции, регулярной в круге. Теорема единственности для регулярных функций.
8. Теоремы Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов из регулярных функций и следствия из них.
9. Ряд Лорана и его кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции, регулярной в кольце, его единственность и неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана.
10. Изолированные особые точки однозначного характера, их классификация. Определение характера особой точки по главной части ряда Лорана.
11. Вычеты. Теоремы Коши о вычетах. Формулы для вычисления вычетов. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана. Целые функции и их свойства.
12. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры. Принцип сохранения области.
13. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Критерий конформности отображения в конечной точке. Понятие конформного отображения в расширенной комплексной области.
14. Дробно-линейные функции и их свойства.
15. Конформные отображения с помощью элементарных функций. Функция Жуковского и ее свойства.

X. Уравнения математической физики

1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Понятие характеристики.
2. Волновое уравнение в случае одной пространственной переменной. Постановка задачи Коши, формула Даламбера. Область зависимости решения задачи Коши.

Непрерывная зависимость решения от начальных функций. Пример отсутствия непрерывной зависимости в случае уравнения Лапласа (пример Адамара).

3. Волновое уравнение в случае двух и трех пространственных переменных. Плоские характеристики волнового уравнения, световой конус. Постановка задачи Коши; единственность решения. Существование решения задачи Коши для волнового уравнения в случае трех пространственных переменных, формула Кирхгофа. Существование решения задачи Коши для волнового уравнения в случае двух пространственных переменных (формула Пуассона, метод спуска). Распространение волн в случае двух и трех пространственных переменных. Непрерывная зависимость решения от начальных функций.
4. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Классы единственности решений. Существование решения, формула Пуассона. Бесконечная дифференцируемость решения. Непрерывная зависимость решения от начальной функции. Принцип максимума для решения задачи Коши.
5. Смешанная задача для волнового уравнения и для уравнения теплопроводности в случае одной пространственной переменной. Единственность решения (метод интеграла энергии в случае волнового уравнения; принцип максимума в случае уравнения теплопроводности). Необходимые условия разрешимости задачи (условия согласования начальных и граничных функций). Метод Фурье решения смешанной задачи. Обоснование метода Фурье.
6. Гармонические функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Потенциалы. Формулы Грина. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теоремы о среднем. Принцип максимума. Теорема Лиувилля. Теорема об устранении особенности.
7. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимые условия разрешимости. Единственность решения; непрерывная зависимость решения от граничной функции. Существование решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре.
8. Задача Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана. Теорема об общем виде решения. Существование решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в шаре.

XI. Теория вероятностей

1. Дискретное вероятностное пространство и классическое определение вероятности.
2. Исчисление вероятностей в дискретном случае. Теорема сложения для *n* событий. Условная вероятность. Формула полной вероятности и формула Байеса. Независимость событий. Некоторые классические дискретные вероятностные модели и связанные с ними распределения.
3. Случайные величины и их числовые характеристики. Независимость случайных величин. Свойства математического ожидания и дисперсии, связанные с понятием независимости. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Ковариация двух случайных величин и ее связь с независимостью.

4. Общее понятие вероятностного пространства. Аксиоматика Колмогорова. Примеры вероятностных пространств.
5. Математическая модель последовательности независимых испытаний. Последовательность испытаний Бернулли.
6. Случайная величина как измеримая функция, ее распределение. Основные типы распределений. Математическое ожидание случайной величины и его основные свойства.
7. Функция распределения и ее свойства. Совместная функция распределения нескольких случайных величин. Критерий независимости. Многомерное нормальное распределение.
8. Характеристическая функция и ее свойства. Использование характеристических функций для исследования сумм независимых случайных величин.
9. Метод характеристических функций в доказательстве предельных теорем. Усиленная форма закона больших чисел. Центральная предельная теорема для суммы одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией. Теорема Пуассона.

Литература

1. Л.Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа.
2. С.М. Никольский. Курс математического анализа.
3. А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин. Курс математического анализа.
4. Г.Н. Яковлев. Лекции по математическому анализу.
5. Г.Е. Иванов. Лекции по математическому анализу.
6. О.В. Бесов. Лекции по математическому анализу.
7. А.Ю. Петрович. Лекции по математическому анализу.
8. А.Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
9. В.И. Чехлов. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре.
10. Д.В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
11. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
12. В.В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений.
13. М.В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
14. Е.С. Половинкин. Курс лекций по теории функций комплексного переменного.
15. М.И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. Теория функций комплексного переменного.
16. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики.
17. В.П. Михайлов. Лекции по уравнениям математической физики.
18. В.М. Уроев. Уравнения математической физики.
19. М.А. Шубин. Лекции об уравнениях математической физики.
20. В.К. Захаров, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков, Теория вероятностей.
21. В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей.

Заведующий кафедрой
высшей математики **Г.Е. Иванов**