МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на первый курс

1.(4) Доказать, что числовая последовательность

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = 2 + \frac{3}{x_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

является сходящейся, и вычислить её предел.

2.(4) Вычислить

$$\lim_{x \to 0} \left(e^x - \ln(1 + x + x^2)\right)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x - \operatorname{th} x}}.$$

3.(7) Доказать, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $e^x > x$. Для функции $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$, найти асимптоты, промежутки монотонности, локальные экстремумы, определить количество точек перегиба, и построить график.

4.(5) Для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ найти все векторы $\vec{c}$, удовлетворяющие уравнению:

$$[\vec{a}, \vec{c}] + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}.$$

5.(5) Аффинное преобразование плоскости f в некоторой декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найти все инвариантные прямые преобразования f, и вычислить аффинное преобразование g, такое, что $f = g \circ g$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на второй курс

1.(5) Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}{x^n}.$$

на множествах $x \in (1, +\infty)$, $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$.

2.(5) Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x^{2\alpha} \cos\frac{x}{2}}{(\sin x)^{\alpha}}\, dx.$$

3.(5) Плоскость Π и параболоид P имеют в прямоугольной декартовой системе координат уравнения

$$z = x + y, \qquad y = 1 + (x-1)^2 + (z-1)^2.$$

Доказать, что Π и P не пересекаются, и вычислить расстояние между плоскостью Π и параболоидом P.

4.(5) Найти поток векторного поля

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{x}{1+z^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

через внешнюю сторону поверхности

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;:\; x^2 + 4y^2 + z^2 = 1, \;\; x \geq 0, \;\; y \geq 0 \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

5.(5) Доказать, что решение задачи Коши

$$y(x)y''(x) = \left(y'(x)\right)^2 - 2xy(x)y'(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2,$$

однозначно определено при $x > 0$, и вычислить предел

$$\lim_{x \to +\infty} y(x).$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на третий и четвёртый курсы

1.(5) Область $D \subset \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ : \ \begin{array}{rcl} y & < & x^2 \\ |x| + |y| & < & 2 \end{array} \right\}.$$

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D y\, dx\, dy$.

2.(5) Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int\limits_0^1 \Big(y'(x)\Big)^3 y(x)\, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

и исследовать их на слабый локальный экстремум.

3.(5) Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = (yz,\, -xz,\, 0)$ по контуру

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ \begin{array}{rcl} 2y + 3 & = & z \\ (x-1)^2 + y^2 & = & z \end{array} \right\},$$

ориентированному положительно относительно вектора $(0, 0, 1)$.

4.(5) Для функции $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, вычислить преобразование Фурье

$$F[f(x)](y) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ixy}\, dx.$$

5.(5) Для функции $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2}{k!\, z^k}$, $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z| = \frac{1}{2}} \frac{dz}{f(z)}.$$

Контур интегрирования ориентирован против часовой стрелки.

ОТВЕТЫ

для поступающих на первый курс

1.(4) Доказать, что числовая последовательность

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = 2 + \frac{3}{x_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

является сходящейся, и вычислить её предел.

Ответ: $x_n \geq 2$ для всех $n \geq 2$, поэтому $|x_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{2}|x_n - 3|$ при $n \geq 2$, т. е. $|x_n - 3| \leq \frac{4}{2^n}|x_2 - 3|$ для $n \geq 2$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

Инструкция: Доказана сходимость x_n — 3 очка, найден предел x_n — 1 очко.

2.(4) Вычислить

$$\lim_{x \to 0} \left(e^x - \ln(1 + x + x^2)\right)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x - \operatorname{th} x}}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x \to 0} \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)\right)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}\right) = \exp\left(\frac{5}{3}\right)$.

Инструкция: Верно разложено основание до $o(x^3)$ — 2 очка, верно разложен знаменатель показателя степени до $o(x^3)$ — 1 очко.

3.(7) Доказать, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $e^x > x$. Для функции $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$, найти асимптоты, промежутки монотонности, локальные экстремумы, определить количество точек перегиба, и построить график.

Ответ: При $x \to +\infty$ выполнено $f(x) = x + o(1)$.

При $x \to -\infty$ выполнено $f(x) = \ln(-x) + o(1)$.

$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. $f'(x) < 0$ при $x < 0$, $f'(x) > 0$ при $x > 0$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$.

$f''(x) = \frac{(2-x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}$. $f''(x) = 0$ имеет решение $x_1 \in (0, 2)$ и $x_2 \in (-\infty, 0)$. При $x < x_2$ выполнено $f''(x) < 0$, при $x \in (x_2, x_1)$ выполнено $f''(x) > 0$, при $x > x_1$ выполнено $f''(x) < 0$.

Инструкция: Доказано неравенство $e^x > x$ для всех $x \in \mathbb{R}$ — 1 очко. Найдена асимптота $y(x) = x$ при $x \to +\infty$ — 1 очко. Найдена $f'(x)$ — 1 очко. Показано $f'(x) < 0$ при $x < 0$, $f'(x) > 0$ при $x > 0$, и указан строгий минимум при $x = 0$ — 1 очко. Найдена $f''(x)$ — 1 очко. Показано, что есть точка перегиба при $x < 0$ и при $x \in (0, 2)$ — 1 очко. Верно изображён график — 1 очко.

4.(5) Для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ найти все векторы $\vec{c}$, удовлетворяющие уравнению:

$$[\vec{a}, \vec{c}] + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}.$$

Ответ: $\vec{c} = \frac{(\vec{a},\vec{b})\vec{a}+\vec{b}+[\vec{a},\vec{b}]}{1+|\vec{a}|^2} - \vec{a}$. Разложив $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ и подставив в уравнение, получим $\alpha + 1 = \gamma\left(\vec{a}, \vec{b}\right), \quad \beta = \gamma, \quad 1 - \gamma\,|\vec{a}|^2 = \beta$.

Инструкция: Получена линейная система на координаты вектора $\vec{c}$ в базисе из векторов $\left\{\ \vec{a}, \vec{b}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\ \right\}$ — 3 очка.

5.(5) Аффинное преобразование плоскости f в некоторой декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найти все инвариантные прямые преобразования f, и вычислить аффинное преобразование g, такое, что $f = g \circ g$.

Ответ: Инвариантные прямые $x + y + \frac{2}{3} = 0$ и $x - y + c = 0$ для любого $c \in \mathbb{R}$. Преобразование g не единственно, одно из них имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ненулевой $\binom{a}{b}$ является направляющим вектором инвариантной прямой тогда и только тогда, когда существует нетривиальное $\lambda \in \mathbb{R}$, такое, что

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{pmatrix} = 0$, т. е. $\frac{5}{2} - \lambda = \pm\frac{3}{2}$, откуда $\lambda = 1$ или $\lambda = 4$.

Для $\lambda = 1$ получаем $\binom{a}{b} = \binom{1}{-1}$. Соответствующая инвариантная прямая имеет вид $x + y + c = 0$. Так как $0 = x^* + y^* + c = 4x + 4y + 2 + c = 4(x + y + c) + 2 - 3c = 2 - 3c$, то $c = \frac{2}{3}$.

Для $\lambda = 4$ получаем $\binom{a}{b} = \binom{1}{1}$. Соответствующая инвариантная прямая имеет вид $x - y + c = 0$. Так как $0 = x^* - y^* + c = x - y + c = 0$, то подойдёт любое число c.

Имеем: $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Тогда $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Рассмотрим матрицу $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Следовательно, $\quad AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, т. е. AA — матрица преобразования f.

Строим преобразование g с указанной матрицей A: $\quad g(x, y) = A \binom{x}{y} + \binom{a}{b}$. Имеем:

$$(g \circ g)(x, y) = AA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = f(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Инструкция: Найдены инвариантные прямые — 2 очка. Найдено преобразование g — 3 очка. Внимание: может быть найдено g, отличное от предъявленного в ответе.

ОТВЕТЫ

для поступающих на второй курс

1.(5) Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}{x^n}.$$

на множествах $x \in (1, +\infty)$, $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$.

Ответ: сходится равномерно на $(1, +\infty)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$,
сходится неравномерно на $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.
расходится на $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$.

Для $x > 0$ имеем $\frac{\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}{x^n} \sim \frac{x}{(3x)^n}$ при $n \to \infty$. Если $x > \frac{1}{3}$, то $\frac{x}{(3x)^n}$ — член сходящегося ряда. Если $0 < x < \frac{1}{3}$, то $\frac{x}{(3x)^n} \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, при $x > \frac{1}{3}$ ряд сходится по признаку сравнения, при $0 < x < \frac{1}{3}$ расходится в силу необходимого условия сходимости.

При $x > \frac{1}{2}$ имеем: $\left|\frac{\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}{x^n}\right| \leq \frac{x}{(3x)^n} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ — член сходящегося ряда. Поэтому ряд равномерно сходится на $(1, +\infty)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ по признаку Вейерштрасса.

Далее, $\sup\limits_{x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)} \left|\frac{\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}{x^n}\right| \geq \lim\limits_{x \to \frac{1}{3}+0} \left|\frac{\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}{x^n}\right| = 3^n \sin\frac{1}{3^{n+1}} \to \frac{1}{3}$ при $n \to \infty$. Следовательно, на $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ нет равномерной сходимости, так как слагаемое ряда стремится к нулю неравномерно.

Инструкция: Исследование поточеченой сходимости — 2 очка. Исследование равномерной сходимости — 3 очка.

2.(5) Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ несобственный интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{x^{2\alpha} \cos\frac{x}{2}}{(\sin x)^{\alpha}}\, dx.$$

Ответ: Сходится при $\alpha \in (-1, 2)$ и расходится при остальных α.

При $x \to +0$ имеем: $\frac{x^{2\alpha}\cos\frac{x}{2}}{(\sin x)^{\alpha}} \sim \frac{1}{x^{-\alpha}}$ — сходится при $-\alpha < 1$.

При $x \to \pi - 0$ имеем: $\frac{x^{2\alpha}\cos\frac{x}{2}}{(\sin x)^{\alpha}} \sim \frac{\pi^{2\alpha}}{2(\pi - x)^{\alpha-1}}$ — сходится при $\alpha - 1 < 1$.

Инструкция: Исследована особенность при $x \to +0$ — 2 очка. Исследована особенность при $x \to \pi - 0$ — 3 очка.

3.(5) Плоскость Π и параболоид P имеют в прямоугольной декартовой системе координат уравнения

$$z = x + y, \qquad y = 1 + (x-1)^2 + (z-1)^2.$$

Доказать, что Π и P не пересекаются, и вычислить расстояние между плоскостью Π и параболоидом P.

Ответ: расстояние равно $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Точка $(1/3,\ 4/3,\ 5/3) \in \Pi$ — ближайшая к P, точка $(1/2,\ 3/2,\ 3/2) \in P$ — ближайшая к Π.

Если $(x, y, z) \in \Pi \cap P$, то $z = x + 1 + (x-1)^2 + (z-1)^2$, т. е. $x^2 - x + 2 + z^2 - 3z + 1 = 0$, откуда $0 = (x-1/2)^2 + (z-3/2)^2 + 1/2 > 0$ — противоречие.

Пусть $(x, y, z) \in \Pi$ — ближайшая к P. Так как $(1, 1, -1)$ — нормаль к Π, то для подходящего $t \neq 0$ точка $(x, y, z) + t(1, 1-1) \in P$ является ближайшей к Π, и $|t|\sqrt{3}$ — искомое расстояние. Нормаль к P в точке $(x+t, y+t, z-t)$ равна $(2(x+t-1), -1, 2(z-t-1))$ и параллельна нормали $(1, 1, -1)$ к Π. Поэтому для походящего $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено $(2(x+t-1), -1, 2(z-t-1)) = \alpha(1, 1, -1)$. Следовательно, $\alpha = -1$, и $x+t = 1/2$, $z-t = 3/2$, $y+t = 1+1/4+1/4 = 3/2$. Так как $z = x + y$, то $3/2 + t = 1/2 - t + 3/2 - t = 2 - 2t$, откуда $t = 1/6$, и искомое расстояние равно $\sqrt{3}/6$.

Инструкция: Доказано, что Π и P не пересекаются — 1 очко. Указано, что нормали к Π и P в ближайших точках параллельны — 1 очко.

4.(5) Найти поток векторного поля

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{x}{1+z^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

через внешнюю сторону поверхности

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ x^2 + 4y^2 + z^2 = 1, \ \ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

Параметризуем S:

$x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \frac{1}{2}\sin\theta\sin\varphi$, $z = \cos\theta$, где $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$.

$$\int\limits_S \left(\vec{F}, d\vec{S}\right) = \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\, \tfrac{x}{1+z^2} \begin{vmatrix} y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\, \frac{\frac{1}{2}\sin^3\theta\cos^2\varphi}{1+\cos^2\theta} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\pi}{4} \cdot \int\limits_{-1}^{1} \tfrac{1-t^2}{1+t^2}\, dt = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\pi}{4} \cdot \int\limits_{-1}^{1} \left(\tfrac{2}{1+t^2} - 1\right) dt = \tfrac{\pi}{8}\left(2 \cdot \tfrac{\pi}{2} - 2\right) = \tfrac{\pi}{4}\left(\tfrac{\pi}{2} - 1\right).$$

Инструкция: Поток записан в виде двойного интеграла в терминах какой-либо параметризации поверхности — 2 очка.

5.(5) Доказать, что решение задачи Коши

$$y(x)y''(x) = \left(y'(x)\right)^2 - 2xy(x)y'(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2,$$

однозначно определено при $x > 0$, и вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} y(x).$$

Ответ: $y(x) = \exp\left(2\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt\right) \to \exp\left(\sqrt{\pi}\right)$ при $x \to +\infty$.

$yy'' - (y')^2 = \left(\frac{y'}{y}\right)' y^2 = -2xyy'$. Так как $y(0) = 1 \neq 0$, то в окрестности $x = 0$ получаем $\left(\frac{y'}{y}\right)' = -2x\,\frac{y'}{y}$, откуда $\frac{y'}{y} = Ce^{-x^2}$, где $C = \frac{y'(0)}{y(0)} = 2$. Следовательно, $\ln|y(x)| = D + 2\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$, где $D = \ln|y(0)| = \ln 1 = 0$. Таким образом, решение $y(x) = \exp\left(2\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt\right)$ — определено при всех $x > 0$, и искомый предел $y(+\infty) = \exp\left(2\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right) = \exp\left(\sqrt{\pi}\right)$.

Инструкция: Понижен порядок уравнения — 1 очко. Найдено решение задачи Коши — 3 очка.

ОТВЕТЫ

для поступающих на третий и четвёртый курсы

1.(5) Область $D \subset \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; : \; \begin{array}{rcl} y & < & x^2 \\ |x| + |y| & < & 2 \end{array} \right\}.$$

Вычислить двойной интеграл $\displaystyle\iint\limits_D y\,dx\,dy$.

Ответ: $-\frac{32}{15}$. Сводим кратный интеграл к повторному:

$$\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{|x|-2}^{2-|x|} y\,dy + \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{|x|-2}^{x^2} y\,dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{|x|-2}^{2-|x|} y\,dy.$$

Так как $\displaystyle\int\limits_{|x|-2}^{2-|x|} y\,dy = 0$, то искомый интеграл равен

$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{|x|-2}^{x^2} y\,dy = \int\limits_{0}^{1} (x^4 - (x-2)^2)dx = \frac{1}{5} - \frac{-1+8}{3} = -\frac{32}{15}.$$

Инструкция: Интеграл верно сведён к сумме повторных — 2 очка.

2.(5) Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int\limits_0^1 \Big(y'(x)\Big)^3 y(x)\,dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

и исследовать их на слабый локальный экстремум.

Ответ: $y(x) = x^{3/4}$ — единственная допустимая экстремаль — строгий слабый локальный минимум.

Уравнение Эйлера $-6y'y''y - 2(y')^3 = 0$, откуда в силу $y' \neq 0$ получаем $3yy'' + (y')^2 = 0$.

Делая замену $y' = p(y)$ получаем $3yp'(y) + p(y) = 0$, откуда $p(y)\sqrt[3]{y} = C$, и $\frac{3}{4}y^{4/3} = Cx + D$.

В силу $y(0) = 0$ получаем $D = 0$, а в силу $y(1) = 1$ находим $C = \frac{3}{4}$, и $y(x) = x^{3/4}, \quad x \in [0,1]$.

Далее, для любой $h \in C_0^1[0,1]$, $h \not\equiv 0$, имеем:

$$\delta^2 J(y;h) = \int\limits_0^1 \left(3y'y(h')^2 + 3(y')^2hh'\right)\,dx = \int\limits_0^1 \left(3y'y(h')^2 - 3y'y''h^2\right)\,dx =$$

$= \int\limits_0^1 \left(\frac{9\sqrt{x}}{4}(h')^2 + \frac{9}{16x\sqrt{x}}h^2 \right) dx > 0, \quad \Rightarrow \quad y$ — строгий слабый локальный минимум.

Инструкция: Понижен порядок уравнения Эйлера — 1 очко. Найдено общее решение уравнения Эйлера — 1 очко. Найдена допустимая экстремаль — 1 очко. Исследован слабый локальный экстремум — 2 очка.

3.(5) Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = (yz,\ -xz,\ 0)$ по контуру

$$\varGamma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{rcl} 2y+3 & = & z \\ (x-1)^2+y^2 & = & z \end{array} \right\},$$

ориентированному положительно относительно вектора $(0,0,1)$.

Ответ: -48π.

По теореме Стокса циркуляция равна $\iint\limits_{\substack{z=2y+3 \\ (x-1)^2+(y-1)^2\le 4}} \left(\operatorname{rot}\vec{F}, \vec{n}\right) dS,$

где нормаль $\vec{n} = (0,\ -2,\ 1)/\sqrt{5}$, $\operatorname{rot}\vec{F} = (x\,, y\,, -2z)$, $dS = \sqrt{5}\,dx\,dy$.

Отсюда находим: $\int\int\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2\le 4} \frac{-6y-6}{\sqrt{5}}\sqrt{5}\,dx\,dy = -12\cdot 4\pi.$

Инструкция: Верно применена теорема Стокса — 2 очка. Вычислен ротор $\vec{F}$ — 1 очко. Поверхностный интеграл записан через двойной интеграл в терминах параметризации поверхности – 1 очко.

4.(5) Для функции $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, вычислить преобразование Фурье

$$F[f(x)](y) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ixy}\, dx.$$

Ответ: $F[f(x)](y) = \pi i e^{-|y|}\operatorname{sign}(y)$.

$$F[f](y) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & y=0, \\ 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=i}\left(f(z)e^{izy}\right), & y>0, \\ -2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=-i}\left(f(z)e^{izy}\right), & y<0. \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & y=0, \\ 2\pi i\left(\frac{ie^{-y}}{2i}\right), & y>0, \\ -2\pi i\left(\frac{-ie^{y}}{-2i}\right), & y<0. \end{array} \right.$$

Инструкция: Вычислено $F[f](0)$ — 1 очко. При $y>0$ указана связь $F[f](y)$ и вычета при $z=i$ функции $f(z)e^{izy}$ — 1 очко. При $y<0$ указана связь $F[f](y)$ и вычета при $z=-i$ функции $f(z)e^{izy}$ — 1 очко.

5.(5) Для функции $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2}{k!\, z^k}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{f(z)}.$$

Контур интегрирования ориентирован против часовой стрелки.

Ответ: $\pi i(5-2e)$. Заметим, что $we^w = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k\,w^k}{k!}$,

поэтому $w\,(we^w)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 w^k}{k!} = (w+w^2)e^w$.

Отсюда $f(z) = \frac{z+1}{z^2}\,\exp\left(\frac{1}{z}\right)$, и интеграл равен $-2\pi i \left(\operatorname*{res}\limits_{z=-1} \frac{1}{f(z)} + \operatorname*{res}\limits_{z=\infty} \frac{1}{f(z)} \right)$.

Имеем: $\operatorname*{res}\limits_{z=-1} \frac{1}{f(z)} = \operatorname*{res}\limits_{z=-1} \frac{z^2 \exp\left(-\frac{1}{z}\right)}{z+1} = e$.

Далее, $\frac{1}{f(z)} = z\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{z}\right) = z\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\ldots\right) =$
$= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{2}+1+1\right)+\ldots = \frac{5}{2z}+\ldots, \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{res}\limits_{z=\infty} \frac{1}{f(z)} = -\frac{5}{2}$.

Вычет на бесконечности можно вычислить “в лоб”:

$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{3}{2z^3}+\ldots} = z\left(1-\frac{2}{z}-\frac{3}{2z^2}+\frac{4}{z^2}+\ldots\right) = \frac{5}{2z}+\ldots \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{res}\limits_{z=\infty} \frac{1}{f(z)} = -\frac{5}{2}$.

Инструкция: Просуммирован ряд для $f(z)$ — 2 очка. Интеграл выражен через вычеты в особых точках функции $\frac{1}{f(z)}$ — 1 очко.

ОЧКИ	**ОЦЕНКА**
0–2	НЕУД. (1)
3–4	НЕУД. (2)
5–7	УДОВЛ. (3)
8–10	УДОВЛ. (4)
11–13	ХОР. (5)
14–16	ХОР. (6)
17–19	ХОР. (7)
20–21	ОТЛ. (8)
22–23	ОТЛ. (9)
24–25	ОТЛ. (10)