

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на первый курс

1. ③ Вычислить неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{1 + \sin(2x) - \cos(2x)}.$$

2. ④ Доказать сходимость числовой последовательности

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{11}{10} + \frac{1}{x_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и вычислить её предел.

3. ④ Найти общее уравнение плоскости, проходящую через прямолинейные образующие поверхности

$$P = \{ (x, y, z) : x = y^2 - z^2 \},$$

пересекающиеся в точке с координатами  $x = 3$ ,  $y = 2$ ,  $z = 1$ . Система координат декартова прямоугольная.

4. ④ Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\operatorname{arcctg}(-x)}{2 \operatorname{arctg}(x)} \right)^x.$$

5. ⑤ При фиксированном параметре  $a > 0$  построить график функции

$$y = x \sqrt[3]{1 - \frac{a}{|x|}},$$

вычислив её асимптоты, первую и вторую производные, указав локальные экстремумы, промежутки возрастания и убывания, промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

# ОТВЕТЫ И ИНСТРУКЦИЯ ПО ПРОВЕРКЕ

## для поступающих на первый курс

1.③ Вычислить неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{1 + \sin(2x) - \cos(2x)}.$$

**Ответ:**  $-\ln \sqrt{|1 + \operatorname{ctg} x|} + C$ .

**Инструкция:** Потеря произвольной постоянной — снять 1 очко.

2.④ Доказать сходимость числовой последовательности

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{11}{10} + \frac{1}{x_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и вычислить её предел.

**Ответ:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}$ .

**Инструкция:** Показано, что, если предел последовательности существует, то он равен  $\frac{3}{2}$  — 1 очко.

Показано, что

$$|x_{n+1} - \frac{3}{2}| \leq \frac{2}{5} |x_n - \frac{3}{2}| \quad - 2 \text{ очко.}$$

Как следствие получено, что

$$|x_n - \frac{3}{2}| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \frac{3}{2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad - 1 \text{ очко.}$$

3.④ Найти общее уравнение плоскости, проходящую через прямолинейные образующие поверхности

$$P = \{ (x, y, z) : x = y^2 - z^2 \},$$

пересекающиеся в точке с координатами  $x = 3, y = 2, z = 1$ . Система координат декартова прямоугольная.

**Ответ:**  $x - 4y + 2z + 3 = 0$ . Направляющие векторы образующих  $(2, 1, 1)$  и  $(6, 1, -1)$ .

**Инструкция:** Найден направляющий вектор одной из двух образующих  $P$ , проходящей через заданную точку — 1 очко.

Найдена нормаль к искомой плоскости — 1 очко.

4.④ Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\operatorname{arctg}(-x)}{2 \operatorname{arctg}(x)} \right)^x.$$

**Ответ:**  $\exp\left(\frac{1}{\pi}\right)$ .  $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $\operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

**Инструкция:** Функция  $\operatorname{arctg}(-x)$  или  $\operatorname{arctg}(x)$  разложена при  $x \rightarrow +\infty$  до  $o\left(\frac{1}{x}\right)$  — 1 очко.

Функция  $\frac{\operatorname{arctg}(-x)}{2\operatorname{arctg}(x)}$  разложена при  $x \rightarrow +\infty$  до  $o\left(\frac{1}{x}\right)$  — 1 очко.

5. (5) При фиксированном параметре  $a > 0$  построить график функции

$$y = x \sqrt[3]{1 - \frac{a}{|x|}},$$

вычислив её асимптоты, первую и вторую производные, указав локальные экстремумы, промежутки возрастания и убывания, промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

**Ответ:** Асимптоты  $y = x - \frac{a}{3}$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $y = x + \frac{a}{3}$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

$$y'(x) = \left(1 - \frac{a}{|x|}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{2a}{3|x|}\right),$$

$x = \frac{2a}{3}$  — локальный минимум,  $x = -\frac{2a}{3}$  — локальный максимум,

функция возрастает на  $(-\infty, -\frac{2a}{3})$  и на  $(\frac{2a}{3}, +\infty)$ ,

функция убывает на  $(-\frac{2a}{3}, 0)$  и на  $(0, \frac{2a}{3})$ ,

$$y''(x) = -\frac{2a^2}{9x^3} \left(1 - \frac{a}{|x|}\right)^{-\frac{5}{3}},$$

$x = \pm a$  — точки перегиба с вертикальной касательной,

функция выпукла вверх на  $(-a, 0)$  и на  $(a, +\infty)$ ,

функция выпукла вниз на  $(-\infty, -a)$  и на  $(0, a)$ .

**Инструкция:** Найдены асимптоты — 1 очко.

Найдена первая производная — 1 очко.

Найдены локальные экстремумы и указаны промежутки возрастания и убывания — 1 очко.

Найдена вторая производная — 1 очко.

Найдены точки перегиба и указаны промежутки выпуклости вверх и вниз — 1 очко.

<b>ОЧКИ</b>	<b>ОЦЕНКА</b>
0–2	НЕУД. (1)
3–4	НЕУД. (2)
5–6	УДОВЛ. (3)
7–8	УДОВЛ. (4)
9–10	ХОР. (5)
11–12	ХОР. (6)
13–14	ХОР. (7)
15–16	ОТЛ. (8)
17–18	ОТЛ. (9)
19–20	ОТЛ. (10)