

## **ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МАГИСТРАТУРУ ПО КОНКУРСНЫМ ГРУППАМ ФПМИ**

Данная программа относится к конкурсным группам:

1. ФПМИ Математика и физика (ПМФ)
2. ФПМИ Информатика (ИВТ)
3. ФПМИ Технологическое лидерство (ТЛ)
4. ФПМИ Наукоемкие технологии и экономика инноваций (НТЭИ)
5. ФПМИ Методы защиты информации (МЗИ)

### **Регламент проведения (в дистанционном формате)**

Вступительное испытание состоит из двух частей: решение практических заданий по программированию, продолжительностью 1,5 астрономических часа, и устной части. Письменная и устная части могут проводиться в разные дни.

Практическое задание по программированию выполняется на личных компьютерах абитуриентов. Допускается использование языков программирования Python, Си, C++ и Java, на абитуриента возлагается ответственность за подготовку собственного компьютера ко вступительному испытанию, и установку необходимого программного обеспечения. Решения необходимо отправлять в систему Яндекс.Контест, необходимые ссылки и регистрационные данные для входа будут предварительно отправлены. Допускается доступ только к системе Яндекс.Контест, а также справочным материалам по стандартным библиотекам для допустимых языков программирования, остальными Веб-ресурсами пользоваться запрещено.

Во время проведения письменной части вступительного испытания будет проводиться дистанционный контроль за исполнением регламента и соблюдением правил проведения вступительного испытания через систему прокторинга МФТИ, расположенную по адресу: <http://exams.mipt.ru>

Для работы с системой, рабочее окружение студента должно соответствовать техническим требованиям:

1. Наличие веб-камеры с минимальным разрешением в 0.5 Мегапикселя и частотой съёмки 25 кадров в секунду.
2. Наличие функционирующего микрофона (может быть встроен в ноутбук / внешний подключенный к компьютеру / встроенный в веб-камеру / иное).
3. Наличие компьютера со стабильным интернет-соединением (без разрывов на протяжении вступительного испытания). Рекомендуемая скорость соединения – от 10 мбит/с.
4. Наличие браузера Google Chrome 70+ или Microsoft Edge 17+ или Mozilla Firefox 52+. Крайне рекомендуется использование браузера Google Chrome последней версии. В данном случае будет обеспечена максимальная производительность и стабильность видеозаписи при сдаче вступительного испытания.
5. Также крайне рекомендовано перед вступительным испытанием, во избежание конфликтов, полностью закрыть все неиспользуемые программы, блокировщики рекламы и прочие расширения.

Абитуриент обязан до начала вступительного испытания проверить техническую возможность подключения к системе прокторинга и зарегистрироваться в системе, если это не было сделано. Не подключение к системе прокторинга приравнивается к неявке на письменную часть

Устная часть проводится с использованием одного из общеиспользуемых средств групповой коммуникации (Hangouts, Google Meet, Zoom и пр.) на усмотрение локальной комиссии, в которую распределен абитуриент. Информация о времени начала и ссылка на

вход в конференцию будут отправлены заранее. Перед началом устной части абитуриент обязан удостовериться в работоспособности оборудования и программного обеспечения для видеосвязи.

Устная часть предполагает:

1. Обсуждение итогов выполнения практического задания;
2. Ответ на устную часть из программы вступительного испытания.

На устной части выдаются вопросы из программы:

1. Из базовой части, - по одному вопросу из каждого подраздела;
2. Из части, связанной с определенной магистерской программой, - по одному вопросу из каждого подраздела.

В каждом разделе перечислен список магистерских программ, для которых он применим.

Во время устного ответа экзаменаторы могут задавать дополнительные вопросы по программе вступительных испытаний, в том числе из других разделов, если абитуриент указал несколько магистерских программ в заявлении при подаче документов на конкурсные группы ФПМИ. В случае, если ответ на дополнительный вопрос подразумевает развернутый ответ, то дополнительно выделяется до 30 минут на подготовку к ответу.

## **1. Базовая часть для всех магистерских программ**

---

### Область применения

Данный раздел является обязательным для всех магистерских программ в рамках конкурсных групп **ФПМИ Математика и физика, ФПМИ Информатика, ФПМИ Технологическое лидерство, ФПМИ Научно-технологические инновации и экономика инноваций** и **ФПМИ Методы защиты информации**.

### **1.1. Теория вероятностей и случайные процессы**

1. Основные понятия теории вероятностей. Определение вероятностного пространства, простейшие дискретные случаи (выборки с порядком и без него, упорядоченные и неупорядоченные), классическая вероятностная модель. Случайная величина, функция распределения.
2. Условные вероятности. Определение условной вероятности, формула полной вероятности, формула Байеса.
3. Математическое ожидание, дисперсия, корреляция. Определение математического ожидания, дисперсии, ковариации и корреляции, их свойства.
4. Независимость событий. Парная независимость и независимость в совокупности.
5. Основные теоремы теории вероятностей. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.
6. Распределения. Стандартные дискретные и непрерывные распределения, их математические ожидания, дисперсии и свойства: биномиальное, равномерное, нормальное, пуассоновское, показательное, геометрическое.

### **Литература**

1. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей, УРСС. М.: 2001;
2. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей, 1970;
3. Ширяев, А. Н. Вероятность, Наука. М.: 1989;
4. Севастьянов Б. А., Курс теории вероятностей и математической статистики, Ч М.: Наука, 1982;
5. Севастьянов, Б. А., Чистяков, В. П., Зубков, А. М. Сборник задач по теории вероятностей, М.: Наука, 1986.

### **1.2. Алгоритмы**

1. Анализ алгоритмов. Понятие о сложности по времени и по памяти. Асимптотика, O-символика. Доказательство корректности алгоритмов.
2. Строки и операции над ними. Представление строк. Вычисление длины, конкатенация. Алгоритмы поиска подстроки в строке.
3. Сортировки. Нижняя теоретико-информационная оценка сложности задачи сортировки. Алгоритмы сортировки вставками, пузырьком, быстрая сортировка, сортировка слиянием. Оценка сложности.
4. Представление матриц и векторов. Алгоритмы умножения матриц и эффективные способы их реализации. Численные методы решения систем линейных уравнений.
5. Численное дифференцирование и интегрирование. Численные методы для решения систем дифференциальных уравнений.
6. Граф. Ориентированный граф. Представления графа. Обход графа в глубину и в ширину. Топологическая сортировка. Подсчет числа путей в орграфе.
7. Алгоритмы поиска кратчайших путей в графе. Алгоритм Дейкстры. Алгоритм Форда-Беллмана. Алгоритм Флойда. Алгоритм A\*.

8. Недетерминированные конечные автоматы, различные варианты определения. Детерминированные конечные автоматы. Их эквивалентность. Машина Тьюринга.

## **Литература**

1. Шень А. Программирование: теоремы и задачи. МЦНМО, 2007;
2. Вирт Н. Алгоритмы и структуры данных. Изд-во Невский диалект, 2005;
3. Керниган Б., Ритчи Д. Язык программирования С. Изд-во Вильямс, 2008;
4. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. - М.: Издательский дом Вильямс, 2005.

## **2. ИВТ, МЗИ и ПМФ. Компьютерные науки**

---

### Область применения

Данный раздел предназначен для всех магистерских программ конкурсных групп **ФПМИ Информатика** и **ФПМИ Методы защиты информации**, а также для следующих магистерских программ в рамках конкурсной группы **ФПМИ Математика и физика**:

- Анализ данных (кафедра Анализа данных);
- Банковские информационные технологии (кафедра Банковских информационных технологий);
- Современная комбинаторика (кафедра Дискретной математики);
- Математические методы информатики (кафедра Дискретной математики);
- Математические и информационные технологии (кафедра Когнитивных технологий);
- Прикладные информационные технологии в управлении и бизнесе (кафедра Корпоративных информационных систем);
- Финансовые технологии в бизнесе (кафедра Финансовых технологий);
- Методы современной математики (кафедра Методов современной математики).

### **2.1. Алгебра и геометрия, линейная алгебра**

1. Группы, кольца, поля. Определения и примеры. Циклические группы. Теорема о гомоморфизме.
2. Подстановки. Определение подстановки, четность подстановок. Произведение подстановок, разложение подстановок в произведение транспозиций и независимых циклов.
3. Комплексные числа. Геометрическое изображение, алгебраическая и тригонометрическая форма записи, извлечение корней, корни из единицы.
4. Системы линейных уравнений. Прямоугольные матрицы. Приведение матриц и систем линейных уравнений к ступенчатому виду. Метод Гаусса.
5. Линейная зависимость и ранг. Линейная зависимость строк (столбцов). Основная лемма о линейной зависимости, базис и ранг системы строк (столбцов). Ранг матрицы. Критерий совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах рангов матриц. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.
6. Определители. Определитель квадратной матрицы, его основные свойства. Критерий равенства определителя нулю. Формула разложения определителя матрицы по строке (столбцу).
7. Операции над матрицами. Операции над матрицами и их свойства. Теорема о ранге произведения двух матриц. Определитель произведения квадратных

- матриц. Обратная матрица, ее явный вид (формула), способ выражения с помощью элементарных преобразований строк.
8. Векторные пространства; базис. Векторное пространство, его базис и размерность. Преобразования координат в векторном пространстве. Подпространства как множества решений систем однородных линейных уравнений. Связь между размерностями суммы и пересечения двух подпространств. Линейная независимость подпространств. Базис и размерность прямой суммы подпространств.
  9. Линейные отображения и линейные операторы. Линейные отображения, их запись в координатах. Образ и ядро линейного отображения, связь между их размерностями. Сопряженное пространство и сопряженные базисы. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.
  10. Билинейные и квадратичные функции. Билинейные функции, их запись в координатах. Изменение матрицы билинейной функции при переходе к другому базису. Ортогональное дополнение к подпространству относительно симметрической билинейной функции. Связь между симметрическими билинейными и квадратичными функциями. Существование ортогонального базиса для симметрической билинейной функции. Нормальный вид вещественной квадратичной функции. Закон инерции.
  11. Евклидовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Ортогональные базисы. Ортогонализация Грама–Шмидта. Ортогональные операторы.
  12. Собственные векторы и собственные значения. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Собственные подпространства линейного оператора, их линейная независимость. Условие диагонализуемости оператора.

## **Литература**

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры, 1999, 2001, Факториал, 2013, 2017, 2018, МЦНМО.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру, 1977, Наука.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч. I, II, 2000, Физматлит.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, 1975, Наука.
5. Сборник задач по алгебре под редакцией Кострикина А.И., И. В. Аржанцев, В.А. Артамонов, Ю.А. Бахтурин и др. — МЦНМО Москва, 2009.

## **2.2. Математический анализ**

1. Пределы по Коши и Гейне, непрерывность. Пределы последовательностей и функций. Непрерывные функции.
2. Элементы общей топологии. Непрерывные отображения. Компактность, связность, хаусдорфовость.
3. Ряды. Числовые и функциональные ряды. Признаки сходимости (Даламбера, Коши, интегральный, Лейбница). Абсолютно и условно сходящиеся ряды.
4. Дифференцирование. Дифференцирование функций. Применение производной для нахождения экстремумов функций. Формула Тейлора.
5. Функции многих переменных. Частные производные. Градиент и его геометрический смысл. Метод градиентного спуска. Поиск экстремумов функций от многих переменных.
6. Интегрирование. Определенный и неопределенный интегралы. Методы интегрирования функций. Первообразные различных элементарных функций.
7. Кратные интегралы (двойные, тройные), замена координат, связь с повторными.
8. Элементы функционального анализа: нормированные, метрические пространства, непрерывность, ограниченность.

9. Алгебра и сигма-алгебра. Мера. Измеримые множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега.

## **Литература**

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по мат. анализу. Изд-во Университет, 1999.
2. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. М.: Наука, 1981. 544 с. Часть II. М.: Наука, 1984. 640 с.
3. Кудрявцев, Л.Д., Курс математического анализа (в трех томах). Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Т. 3. Гармонический анализ. Москва, Изд-во Высшая школа, 1981.
4. Демидович, Б. П, Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Изд-во Аст, 2007.

### **2.3. Комбинаторика**

1. Основные правила комбинаторики: правило сложения, умножения. Основные комбинаторные объекты: сочетания и размещения с повторениями и без повторений. Формулы для количества сочетаний и размещений. Принцип Дирихле. Примеры.
2. Множества. Круги Эйлера, операции на множествах. Формула включений и исключений. Примеры.
3. Сочетания. Размещения, перестановки и сочетания. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля. Сочетания с повторениями.
4. Графы: неориентированные, ориентированные, простые графы, мультиграфы и псевдографы. Изоморфизм графов. Некоторые стандартные классы графов: полные, двудольные, цепи, циклы, деревья. Критерий двудольности графа.
5. Деревья. Связь между количеством вершин и рёбер. Эквивалентные определения класса деревьев. Формула Кэли для числа деревьев на фиксированном множестве вершин.
6. Кликовое число, число независимости, хроматическое число; связь между этими числами. Жадный алгоритм раскраски графа, пример его неоптимальности.

## **Литература**

1. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М., Наука, 1969 и более свежие издания
2. М. Холл. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970.
3. Онлайн-курсы на [www.coursera.org](http://www.coursera.org) “Комбинаторика для начинающих”, “Теория графов” от МФТИ

### **2.4. Компьютерные науки**

1. Регулярные выражения. Теорема Клини об эквивалентности регулярных выражений и конечных автоматов.
2. Контекстно-свободные грамматики. Автоматы с магазинной памятью. Эквивалентность автоматов с магазинной памятью и контекстно-свободных грамматик.
3. Архитектура Фон-Неймана. Принципы однородности памяти, адресности и программного управления. Гарвардская архитектура, отличия от архитектуры Фон-Неймана. Примеры реализаций.
4. Абстрактные структуры данных: списка, вектора, дерева поиска. Их асимптотики для операций поиска элемента и вставки новых элементов в середину или конец. Примеры реализаций.

5. Целочисленная арифметика в представлении компьютера. Знаковые и беззнаковые значения, способы представления отрицательных значений. Целочисленное переполнение и его контроль. Длинная целочисленная арифметика.
6. Вещественная арифметика. Представления с фиксированной и плавающей точкой. Стандарт IEEE754. Специальные вещественные значения, определенные стандартом IEEE754 и операции над ними.
7. Устройство виртуального адресного пространства процесса. Стек и куча. Динамическая загрузка библиотек. Механизм трансляции адресов из виртуального в физическое адресное пространство.
8. Операционные системы и их компоненты. Ядро операционных систем. Системные вызовы и их отличия от обычных библиотечных функций. Способы реализации системных вызовов (прерывания, sysenter, syscall).
9. Процессы и потоки. Сходства и различия между ними. Реализация многозадачности и алгоритмы планирование задач в операционных системах.
10. Проблема многопоточной синхронизации. Атомарные переменные и объекты блокировки. Неблокирующие структуры данных и их реализация.
11. Интерконнект в вычислительном кластере. Отличие интерконнекта от глобальных компьютерных сетей. Основные характеристики интерконнекта. Топологии соединений узлов в вычислительном кластере, характеристики топологий.
12. Понятие ускорения и масштабируемости параллельных программ. Закон Амдала. Оценка эффективности параллельных программ. Ярусно-параллельная форма программы.
13. Параллельные и распределённые вычислительные системы. Парадигма Map-Reduce. Примеры, отличия. Распределенные файловые системы. Особенности хранения файлов в них. Репликация.

## Литература

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. - М.: Издательский дом Вильямс, 2005;
2. К. Дж. Дейт. Введение в системы баз данных (учебник для вузов). — 8-е изд. — М.: Вильямс, 2008;
3. Chuck Lam. Hadoop in Action. New York: Manning Publications co., 2011;
4. Робачевский А.М., Немнюгин С.А. Операционная система UNIX. 2-е издание. - СПб.: БХВ, 2014;
5. Таненбаум Э., Бос Х. Современные операционные системы. 4-е издание. - СПб.: Питер, 2018;
6. Maurice Herlihy, Nir Shavit. The Art of Multiprocessor Programming. Morgan Kaufman Publishers, 2012.

## 3. НТЭИ, ТЛ и ПМФ. Экономика инноваций

---

### Область применения

Данный раздел предназначен конкурсным групп **ФПМИ Научные технологии и экономика инноваций**, **ФПМИ Технологическое лидерство**, а также для следующих магистерских программ в рамках конкурсной группы **ФПМИ Математика и физика**:

- Концептуальный анализ и проектирование систем организационного управления (кафедра Концептуального анализа и проектирования)

- Научно-информационные технологии (кафедра Теоретических и прикладных проблем инноваций)
- Управление проектами в сфере технологий искусственного интеллекта (кафедра Управления технологическими проектами)

### 3.1. Теоретические вопросы

1. Что такое инновация?
2. Бизнес и наука как человеческие ценности.
3. Операционная и инновационная деятельность.
4. Что такое нематериальные активы?
5. Что такое экономика знаний, прав и инноваций?
6. Что такое инновационный цикл и какие этапы он включает?
7. Источники финансирования на каждом из этапов коммерциализации технологий.
8. Специфика маркетинга в инновационной деятельности.
9. Как Вы понимаете термин «тестирование рынка»?
10. Как Вы понимаете термин «открытые инновации». Какие механизмы он включает.
11. В чем заключаются основные стратегии коммерциализации результатов НИОКР и технологий?
12. Критерии оценки коммерческого потенциала новых технологий.
13. Что такое единая технология и комплекс технических систем?
14. Виды интеллектуальной собственности. Роль интеллектуальной собственности в коммерциализации.
15. Особенности работы венчурного капитала.
16. Тенденции развития инновационного предпринимательства в России.
17. Какие виды организационных структур вам известны?
18. Что такое система? Назовите основные этапы системного анализа.

### 3.2. Решение кейса

Решение кейса направлено на выяснение склонности, интереса и мотивации абитуриента к получению дополнительных предпринимательских компетенций. Пример творческого кейса приводится ниже.

Обсуждение стратегии инновационной компании на примере «Яндекс»

«Яндекс» возник в 1990-е годы как небольшая частная компания. Основатели планировали создать бизнес семейного типа. За 10 лет он вырос до ИТ - гиганта и совершил IPO. Также «Яндекс» активно занимается слияниями и поглощениями в смежных областях

#### Вопросы:

1. Почему основатель был вынужден изменить стратегии «семейного бизнеса»?
2. Зачем «Яндекс» покупает доли в профильных компаниях?
3. В чем смысл его диверсификации, где может быть синергия между бизнесами?

#### Литература

1. В.А. Антонец и др. Основы инновационной деятельности.
2. А. Аузан. Институциональная экономика для чайников.
3. Гай Кавасаки. Стартап: 11 мастер-классов от экс-евангелиста Apple и самого дерзкого венчурного капиталиста Кремниевой долины/.
4. А. Остервальдер, И. Пинье. Построение бизнес-моделей.



5. Эрик Рис. БИЗНЕС С НУЛЯ. Метод Lean Startup для быстрого тестирования идей и выбора бизнес-модели.
6. Питер Тиль. От нуля к единице. Как создать стартап, который изменит будущее.
7. И.И. Родионов, А.С. Семенов. Предпринимательские финансы. СПб., Алетейа, 2013.
8. Стив Бланк. Четыре шага к озарению. Стратегии создания успешных стартапов, Альпина Паблишер, 2017.
9. Стив Бланк, Боб Дорф. Стартап. Настольная книга основателя. Альпина Паблишер, 2012.
10. В.Ю. Дорофеев. Яндекс Воложа. История создания компании мечты. Альпина Паблишер, 2013.
11. Ф. Сеннет. Groupm. Бизнес-модель, которая изменила то, как мы покупаем. Альпина Паблишер, 2013.
12. Эрик Шмидт, Jonathan Rosenberg, Алан Игл. Как работает Google. Эксмо, 2015.
13. Рассел Акофф, Фредерик Эмери. О целеустремлённых системах
14. Бергаланфи Л. фон. История и статус общей теории систем. В кн.: Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник. — М.: «Наука», 1973.

#### **4. ПМФ. Математическое моделирование, вычислительная математика и физика**

##### Область применения

Данный раздел предназначен для следующих магистерских программ в рамках конкурсной группы **ФПМИ Математика и физика**:

- Прикладная математика (кафедра Высшей математики, кафедра Вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике, кафедра Математического моделирования и прикладной математики)
- Математическая физика и математическое моделирование (кафедра Высшей математики, кафедра Математического моделирования и прикладной математики, кафедра Математического моделирования сложных систем и оптимизации)
- Управление динамическими системами (кафедра Математического моделирования и прикладной математики)
- Математические и информационные технологии (кафедра Прикладных проблем теоретической и математической физики)

##### **Список вопросов**

1. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка. Канонические формы.
2. Задача Коши для гиперболических уравнений в частных производных второго порядка. Метод характеристик. Формулы Даламбера, Пуассона, Коши.
3. Начально-краевая задача для линейных уравнений параболического типа. Метод Фурье. Принцип максимума.
4. Краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Принцип максимума.
5. Дискретизация, обусловленность задачи, устойчивость вычислительного метода, его экономичность, устранимые и неустраиваемые погрешности вычислений. Элементарная теория погрешности.
6. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Каноническая и операторная форма записи. Содержательный пример – разностная схема для уравнения Лапласа. Согласованные нормы векторов и матриц в линейных

- нормированных пространствах. Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы (метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, метод прогонки для систем специального вида). Итерационные методы (метод простой итерации, идея и формулы чебышевских итерационных методов, другие итерационные методы).
7. Переопределенные системы линейных алгебраических уравнений. Задачи, приводящие к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений. Обобщенное решение системы, метод наименьших квадратов.
  8. Численное решение систем нелинейных алгебраических уравнений. Сжимающее отображение, метод простой итерации, его геометрическая интерпретация, метод релаксации. Метод Ньютона. Порядок сходимости итерационного метода.
  9. Интерполяция функций. Конечные и разделенные разности. Постановка задачи интерполяции. Обобщенный полином. Полиномиальная интерполяция; существование и единственность интерполяционного полинома, остаточный член полинома, формы записи Лагранжа и Ньютона. Обусловленность интерполяционного процесса. Константы Лебега. Чебышевские узлы интерполяции. Тригонометрическая интерполяция. Кусочно-многочленная интерполяция. Сплайн-интерполяция.
  10. Численное интегрирование. Квадратурные формулы Ньютона–Котеса (прямоугольников, средних, трапеций, Симпсона), их погрешность. Формулы Гаусса.
  11. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Метод сеток. Простейшие разностные схемы: явная и неявная схемы Эйлера, схема с центральной разностью. Определения сходимости, аппроксимации, устойчивости. Теорема Рунге–Кутты о сходимости. Методы Рунге–Кутты, их устойчивость.
  12. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Линейная краевая задача. Метод численного построения общего решения. Метод прогонки. Метод стрельбы. Метод квазилинеаризации (метод Ньютона) для численного решения нелинейных краевых задач. Краевая задача на собственные значения.
  13. Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Аппроксимация и устойчивость разностных схем. Теорема о сходимости решения разностной задачи к решению дифференциальной. Необходимое условие сходимости Куранта–Фридрихса–Леви. Приемы исследования разностных задач на устойчивость. Принцип максимума, спектральный признак устойчивости, принцип замороженных коэффициентов. Другие подходы к исследованию устойчивости.
  14. Численные методы решения задач, описываемых уравнениями в частных производных гиперболического типа. Уравнение переноса, волновое уравнение, системы уравнений гиперболического типа.
  15. Численные методы решения линейных и нелинейных уравнений в частных производных параболического типа. Явные и неявные разностные схемы для уравнения теплопроводности. Многомерные по пространству параболические уравнения. Метод расщепления. Метод переменных направлений.
  16. Численные методы решения уравнений эллиптического типа. Разностная схема «крест». Аппроксимация и устойчивость разностных схем. Методы решения возникающих линейных систем уравнений большой размерности. Метод простой итерации. Чебышевские итерационные методы.
  17. Метрические и топологические пространства. Примеры:  $l_p$ ,  $C_p [a,b]$  ( $p \geq 1$ ),  $C_n [a,b]$ . Неравенства Гельдера и Минковского.
  18. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Принцип сжимающих отображений.

19. Компактность и центрированные системы замкнутых множеств. Теорема Арцела-Асколи.
20. Норма оператора. Полнота нормированного пространства  $L(E_1, E_2)$ . Теорема Банаха-Штейнгауза.
21. Теорема Хана-Банаха.
22. Слабая сходимость. Теорема Банаха - Алооглу.
23. Интеграл Лебега (определение и основные свойства). Теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, Фату, Беппо Леви.
24. Характеристическое свойство евклидовых пространств. Банаховы и гильбертовы пространства. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Теорема Рисса о линейных функционалах в гильбертовом пространстве.

## Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.
3. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2001, 302с.
4. Рябенький В.С. Введение в вычислительную математику. — М.: Наука– Физматлит, 1994. — 335 с. 2-е изд. М.: Физматлит, 2000. — 296 с.
5. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. — М.: Изд-во МФТИ, 1994. — 526 с.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
7. Лобанов А.И., Петров И.Б. Вычислительные методы для анализа моделей сложных динамических систем. Часть 1. — М.: МФТИ, 2000. — 168 с.
8. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике. 2-е изд. — М.: Изд-во МФТИ, 2000. — 224 с.
9. Сборник задач для упражнений по курсу Основы вычислительной математики / Под ред. Рябенького В.С. – М.: МФТИ, 1988.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Г. Численные методы. 8-е изд. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. — 624 с.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
12. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа.
13. Иосида К. Функциональный анализ.

## 5. ПМФ. Компьютерные технологии и интеллектуальный анализ данных

### Область применения

Данный раздел предназначен для следующих магистерских программ в рамках конкурсной группы **ФПМИ Математика и физика**:

- Интеллектуальный анализ данных (кафедра Интеллектуальных систем, кафедра Проблем передачи информации и анализа данных)
- Прикладная информатика (кафедра Интеллектуальных систем)
- Математические и информационные технологии (кафедра Интеллектуальных систем, кафедра Информатики и вычислительной математики, кафедра Теоретической и прикладной информатики, кафедра Теоретической кибернетики и методов оптимального управления)
- Прикладные вычислительные модели и программные комплексы (кафедра Информатики и вычислительной математики)

- Прикладные информационные технологии в управлении и бизнесе (кафедра Математических основ управления)
- Системное программирование (кафедра Системного программирования)
- Системные исследования (кафедра Системных исследований)
- Управляющие и информационные системы (кафедра Управляющих и информационных систем)

### Список вопросов

1. Функции алгебры логики. Табличное задание функций. Элементарные функции, их свойства, таблица операций, коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность элементарных функций. Формулы и функции алгебры логики. Теоремы о разложении функций по одной и нескольким переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.
2. Функциональная полнота систем функций алгебры логики. Замкнутые классы. Пять предполных замкнутых классов  $T_0, T_1, L, S, M$ . Теорема о функции, двойственной к суперпозиции. Критерий функциональной полноты систем функций алгебры логики (теорема Поста). Основная лемма. Лемма о несамодвойственной функции. Лемма о немонотонной функции. Лемма о нелинейной функции. Следствия из критерия полноты.
3. Предмет комбинаторики. Комбинаторные задачи о числе функций, слов в алфавите и размещений объектов по ячейкам при различных ограничениях ( $m^n$ ,  $[m]^n$ ,  $[m]_n$ ,  $[m]_n/n!$ ,  $P_n$ ). Числа Стирлинга первого рода, рекуррентное соотношение для них. Биномиальные коэффициенты, производящая функция для них, основные комбинаторные тождества. Полиномиальные коэффициенты, производящая функция для них, основные комбинаторные тождества. Число разбиений  $n$  объектов на  $m$  классов. Числа Стирлинга второго рода. Рекуррентное соотношение для  $S(n, k)$ . Разложение степени  $x^n$  в базисе  $\{[x]_k\}$ . Числа Белла разбиений множества на непересекающиеся подмножества, рекуррентное соотношение для чисел Белла.
4. Логические методы комбинаторного анализа. Принцип включений-исключений. Задача о числе беспорядков, задача о числе сюръективных отображений конечных множеств. Системы представителей множеств. Системы различных представителей (с.р.п.). Необходимое и достаточное условие существования с.р.п. Алгоритм построения с.р.п. для заданной системы множеств. Системы одновременных представителей.
5. Определение графа. Неориентированные и ориентированные графы. Изоморфные графы. Полные ориентированные и неориентированные графы. Локальные степени вершин. Число вершин нечетной степени в конечном графе. Машинное представление графов. Матрица инцидентности. Матрица смежности (вершин). Список пар, список инцидентности. Пути (маршруты, цепи) в графе, простые пути, циклы. Связность. Теорема о связности двух вершин, имеющих нечетную локальную степень. Максимальное число ребер в графе с  $n$  вершинами и  $k$ - связными компонентами. Деревья. Связанность любых двух вершин дерева единственным простым путем. Изображение дерева. Концевые (висячие) вершины и концевые (висячие) ребра дерева. Поиск в глубину и в ширину. Теорема о числе различных деревьев с данными  $n$  вершинами.
6. Эйлеровы пути и циклы, теорема о существовании эйлеровых путей и циклов в графе. Алгоритм построения эйлеровых циклов. Гамильтоновы пути и циклы. Пути, имеющие тип цикла. Достаточное условие для того, чтобы полный простой путь имел тип цикла. Связь между наличием в связном графе гамильтоновых циклов и длиной максимальных простых путей в нем.

7. Нахождение кратчайших путей в ориентированном графе от фиксированной вершины (случай неотрицательных весов ребер).
8. Алгебраические структуры. Бинарные операции. Полугруппы и моноиды. Группы. Примеры групп. Группа перестановок (симметрическая группа). Теорема Келли. Подгруппы. Порождающие или образующие элементы группы.
9. Левые и правые смежные классы группы по подгруппе. Индекс подгруппы в группе. Порядок элемента группы. Циклические группы. Теорема Лагранжа. Сопряженные элементы и сопряженные подгруппы. Нормальные делители. Факторгруппа. Изоморфизмы, автоморфизмы и гомоморфизмы групп. Ядро гомоморфизма. Внутренние автоморфизмы. Теорема о гомоморфизме групп.
10. Кольца. Примеры колец. Кольцо целых чисел. Кольцо многочленов над кольцом (полем). Кольца классов вычетов в кольце целых чисел и кольце многочленов. Подкольцо. Обратимые элементы кольца, группа обратимых элементов кольца, делители нуля. Левые, правые и двусторонние идеалы. Главные идеалы. Максимальные и простые идеалы. Кольца классов вычетов. Идеалы в кольцах многочленов. Факторкольцо. Теорема о гомоморфизме колец.
11. Деление с остатком в кольцах целых чисел и многочленов над кольцом целых чисел. Евклидовы кольца. Идеалы в евклидовых кольцах. Кольца главных идеалов. Факториальность колец главных идеалов.
12. Поля. Примеры полей. Поле классов вычетов. Характеристика поля. Простое подполе. Конечные и алгебраические расширения полей. Поле разложения. Конечные поля.
13. Метод формальных теорий. Основные понятия исчисления высказываний. Выражения, формулы и аксиомы. Схемы аксиом и правило вывода. Вывод в исчислении высказываний. Теорема дедукции. Теорема о полноте. Непротиворечивость исчисления высказываний и независимость его схем аксиом.
14. Основные понятия теорий первого порядка: кванторы, термы, формулы, свободные и связанные вхождения переменных в формулы. Интерпретации. Выполнимость и истинность. Модели. Логически общезначимые формулы. Схемы аксиом и правила вывода исчисления предикатов. Непротиворечивость исчисления предикатов. Теорема дедукции. Теорема Геделя о полноте (без доказательства).
15. Необходимость уточнения понятия алгоритма. Примеры алгоритмов. Машины Тьюринга (МТ) и их основные свойства. Примеры МТ. Нумерация МТ. Операции над МТ. Понятие нормального алгоритма Маркова. Примеры. Марковские вычисления. Эквивалентность определений алгоритма по Тьюрингу и Маркову.
16. Понятие вычислимости. Примитивно-рекурсивные функции. Тезис Чёрча.
17. Алгоритмически неразрешимые проблемы: распознавание применимости, самоприменимости и переводимости.
18. Проблема тождества слов в полугруппах. Разрешимые случаи. Примеры. Неразрешимость проблемы тождества слов в полугруппах.
19. Языки и их представление. Грамматики. Типы грамматик по Хомскому и их свойства. Связь машин Тьюринга и грамматик типа 0.
20. Конечные автоматы. Регулярные множества и выражения. Детерминированные и недетерминированные конечные автоматы.
21. Эквивалентность классов языков, определяемых конечными автоматами, регулярными выражениями и праволинейными грамматиками.
22. Детерминированные машины Тьюринга и класс P. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые языки.
23. Недетерминированные вычисления и класс NP.
24. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема Кука. Семь основных NP-полных задач (выполнимость, 3-выполнимость, трехмерное сочетание, вершинное покрытие, клика, гамильтонов цикл, разбиение). Методы доказательства NP-полноты.
25. Задачи с числовыми параметрами. Псевдополиномиальная сводимость. Сильная NP-полнота (задачи: упорядочение работ внутри интервалов, многопроцессорное

- расписание без прерываний, коммивояжер, упаковка в контейнеры).
26. Псевдополиномиальные алгоритмы (задачи: разбиение, рюкзак, многопроцессорное расписание без прерываний при фиксированном числе процессоров, упаковка в контейнеры при фиксированном числе контейнеров).
  27. Сводимость по Тьюрингу и NP-трудные задачи (задача K-е по порядку множество). NP-эквивалентные задачи (оптимизационные варианты семи основных NP-полных задач, оптимизационная задача коммивояжера).
  28. Алгоритмы сортировки и их сложность.
  29. Магазинные автоматы. Контекстно-свободные грамматики и автоматы с магазинной памятью. Детерминированные и недетерминированные магазинные автоматы.

## **Литература**

1. Журавлев Ю.И., Флеров Ю.А. Дискретный анализ. Ч. 1: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 1999.
2. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Под ред. С.В. Яблонского, О.В. Лупанова. – Т. 1. – М.: Наука, 1974.
3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979.
4. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. – М.: Мир, 1990.
5. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. – М.: Мир, 1998.
6. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988.
7. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. – М.: МГУ, 1972.
8. Уилсон Р. Дж. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977.
9. Харрари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973.
10. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970.
11. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001.
12. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
13. Ван-дер-Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
14. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.
15. Трахтенберг Б.А. Алгоритмы и вычислительные автоматы. М.: Сов. Радио, 1974.
16. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
17. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.
18. Л. Ловас, М. Пламмер. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. М.: Мир, 1998.
19. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы. Построение и анализ. М.: МЦНМО, 1999.

## **6. ПМФ. Системный анализ в экономике и управлении**

---

### Область применения

Данный раздел предназначен для следующих магистерских программ в рамках конкурсной группы **ФПМИ Математика и физика**:

- Прикладная экономика (кафедра Анализа и прогнозирования национальной экономики)
- Теория управления, кибернетика и исследования операций (кафедра Анализа систем и решений, кафедра Математического моделирования сложных систем и оптимизации)

### Список вопросов

1. Определение и топологические свойства выпуклых множеств. Операция с выпуклыми множествами.
2. Выпуклые комбинации. Теоремы Каратеодори, Радона, Хелли.
3. Теоремы отделимости.
4. Опорные функции и их свойства.
5. Выпуклые функции и их свойства. Критерий выпуклости дифференцируемой функции.
6. Преобразование Лежандра – Юнга – Фенхеля. Теорема Фенхеля – Моро.
7. Субдифференциал выпуклой функции и его связь с производной по направлению.
8. Теорема Моро-Рокафеллара. Теорема Дубовицкого –Милитюна о субдифференциале максимума.
9. Теорема Куна-Таккера для задач выпуклого программирования.
10. Теорема двойственности для задач линейного программирования.
11. Задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Первые интегралы уравнения Эйлера. Условия Вейерштрасса, Лежандра и Якоби. Уравнение Якоби. Условия Вейерштрасса–Эрдмана.
12. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина.
13. Модель межотраслевого баланса В.В. Леонтьева. Продуктивные матрицы. Критерии продуктивности.
14. Неотрицательная обратимость матрицы  $(xE-A)$  и ее связь с продуктивностью. Теорема о разложении резольвенты.
15. Теорема Фробениуса-Перрона. Оценка темпов сбалансированного экономического роста. Свойства числа Фробениуса-Перрона.
16. Неразложимые матрицы. Свойства числа Фробениуса-Перрона неразложимой матрицы.
17. Теорема об устойчивых матрицах. Теорема Моришимы магистрали. Экономическая интерпретация вектора Фробениуса - Перрона.
18. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна. Оценка стоимости опциона.
19. Теорема Брауэра.
20. Точечно-множественные отображения и их свойства (замкнутость, полунепрерывность сверху и снизу). Теорема Какутани.
21. Лемма Гейла-Никайдо-Дебре.
22. Игры в нормальной форме. Понятия равновесия по Нэшу и оптимальности по Парето. Примеры игр: «дилемма заключенного», «семейный спор», «чет-нечет».
23. Равновесие по Штаккельбергу. Смешанные стратегии. Теорема фон Неймана о равновесии в смешанных стратегиях в матричной игре.
24. Теорема Нэша. Модель олигополии Курно.
25. Модель Эрроу-Дебре. Конкурентное равновесие и закон Вальраса. Модификация функций спроса и предложения. Сведение вопроса о существовании конкурентного равновесия к вариационному неравенству. Замкнутость отображений спроса и предложения. Теорема Эрроу-Дебре.
26. Первая и вторая теоремы теории благосостояния.

## Литература

1. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Едиториал УРСС, 2003, 174 с.
2. Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал Пресс, 2006, 144 с.
3. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972, 518с.
4. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984, 294с.
5. Экланд И. Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983, 248с.
6. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985, 200с.
7. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988, 264с.
8. Маршалл А., Олкин И. Неравенства, теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983, 574с.
9. Мельников А.В. Стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. М.: ТВП, 1997, 125с.