ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. 2 Вычислить

$$\int \frac{dx}{1+e^x}.$$

2. 2 В прямоугольной декартовой системе координат прямая L задана уравнением

$$\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+2}{3}.$$

Найти расстояние от начала координат O до прямой L и нормальное уравнение плоскости, проходящей через прямую L и точку O.

3. 2 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''(x) + y(x) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. 2 Найти экстремумы функции $f(x,y) = x^2 - y$ при условии $2x^2 + y^2 = 1$.

5. 3 Найти фундаментальную систему решений линейной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. 3 Пусть $B = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\ \}$. Вычислить

$$\iiint\limits_B e^z\, dx\, dy\, dz.$$

7. 3 Исследовать несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра α:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(e^x + \sqrt{x})}{(x + x^4)^\alpha} dx.$$

8. 3 Функцию $f(x) = \pi - 2|x|$, $x \in (-\pi, \pi)$, разложить в ряд Фурье.

9. 4 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy''(x) + (2-2x)y'(x) + (x-2)y(x) = 1, \quad x > 0.$$

10. 4 Случайная точка $\omega = (p,q)$ равномерно распределена в треугольнике с вершинами

$$L(-3/2, 0), \quad M(0,3), \quad N(3/2, 0),$$

система координат декартова прямоугольная. Для уравнения со случайными коэффициентами $x^2 + 2px + q = 0$ найти вероятности событий

$$A_1 = \{\text{ все корни уравнения действительны }\}, \quad A_2 = \{\text{ все корни уравнения положительны }\}.$$

ОТВЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. 2 Вычислить

$$\int \frac{dx}{1+e^x}.$$

Ответ: $x - \ln(1+e^x) + C$.

2. 2 В прямоугольной декартовой системе координат прямая L задана уравнением

$$\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+2}{3}.$$

Найти расстояние от начала координат O до прямой L и нормальное уравнение плоскости, проходящей через прямую L и точку O.

Ответ: $\rho(O,L) = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \Big/ \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \Big/ \sqrt{14} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}},$

уравнение плоскости $2x - 7y + z = 0$.

3. 2 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''(x) + y(x) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) - \dfrac{x}{2}\cos(x)$.

4. 2 Найти экстремумы функции $f(x,y) = x^2 - y$ при условии $2x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: $f(x,y) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{y^2}{2} - y$, $y \in [-1,1]$,

$(0,-1)$ — максимум, $f(0,-1) = 1$,

$(0,1)$ — минимум, $f(0,1) = -1$.

5. 3 Найти фундаментальную систему решений линейной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: Вторая строка матрицы — линейная комбинация первой и третьей, поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \text{ФСР} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. (3) Пусть $B = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2 \le 1\ \}$. Вычислить

$$\iiint\limits_B e^z\,dx\,dy\,dz.$$

Ответ: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2\,dr \int\limits_0^{\pi} e^{r\cos\theta}\sin\theta\,d\theta = 2\pi \int\limits_0^1 r^2\,dr \int\limits_{-1}^{1} e^{rt}\,dt = 4\pi \int\limits_0^1 r\,\mathrm{sh}(r)\,dr = 4\pi(\mathrm{ch}\,1 - \mathrm{sh}\,1) = \frac{4\pi}{e}$.

7. (3) Исследовать несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра α:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(e^x+\sqrt{x})}{(x+x^4)^\alpha}dx.$$

Ответ: При $x \to +0$ имеем $f(x) \sim \dfrac{\sqrt{x}}{x^\alpha}$, то есть сходимость при $\alpha - \dfrac{1}{2} < 1$.

При $x \to +\infty$ имеем $f(x) \sim \dfrac{x}{x^{4\alpha}}$, то есть сходимость при $4\alpha - 1 > 1$.

При $\dfrac{1}{2} < \alpha < \dfrac{3}{2}$ сходится, при остальных — расходится.

8. (3) Функцию $f(x) = \pi - 2|x|$, $x \in (-\pi,\pi)$, разложить в ряд Фурье.

Ответ: $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi-2x)\,dx = 0$, при $k \in \mathbb{N}$ имеем $b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = 0$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi-2x)\cos(kx)\,dx = \frac{4}{\pi k}\int\limits_0^{\pi}\sin(kx)\,dx = \frac{4}{\pi k^2}\left(1-(-1)^k\right).$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi k^2}\left(1-(-1)^k\right)\cos(kx) = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{8}{\pi(2s-1)^2}\cos((2s-1)x).$$

9. (4) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy''(x) + (2-2x)y'(x) + (x-2)y(x) = 1, \quad x > 0.$$

Ответ: Можно заметить, что $y_1(x) = e^x$ является нетривиальным решением однородного уравнения. Тогда для любого решения однородного уравнения $y(x)$ по теореме Лиувилля имеем:

$$\begin{vmatrix} e^x & y(x) \\ e^x & y'(x) \end{vmatrix} = e^{2x}\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{e^x}\right) = C\exp\left(-\int \frac{2-2x}{x}\,dx\right) = C\,\frac{e^{2x}}{x^2}, \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = -C\,\frac{e^x}{x} + De^x.$$

Неоднородное уравнение решаем методом Лагранжа вариации постоянных:

$$y(x) = C(x)\,\frac{e^x}{x} + D(x)e^x, \quad C'(x)\frac{e^x}{x} + D'(x)e^x = 0, \quad y'(x) = C(x)\frac{(x-1)e^x}{x^2} + D(x)e^x,$$

$$C'(x)\frac{(x-1)e^x}{x} + xD'(x)e^x = 1, \quad \begin{pmatrix} \frac{e^x}{x} & e^x \\ \frac{(x-1)e^x}{x} & xe^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C'(x) \\ D'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} C'(x) \\ D'(x) \end{pmatrix} = \frac{x}{e^{2x}}\begin{pmatrix} -e^x \\ \frac{e^x}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xe^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} C(x) \\ D(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+1)e^{-x} + C_1 \\ -e^{-x} + D_1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y(x) = \left((x+1)e^{-x} + C_1\right)\frac{e^x}{x} + \left(-e^{-x} + D_1\right)e^x = \frac{1}{x} + C_1\,\frac{e^x}{x} + D_1\,e^x.$$

10. 4 Случайная точка $\omega = (p, q)$ равномерно распределена в треугольнике с вершинами

$$L(-3/2, 0), \quad M(0, 3), \quad N(3/2, 0),$$

система координат декартова прямоугольная. Для уравнения со случайными коэффициентами $x^2 + 2px + q = 0$ найти вероятности событий

$$A_1 = \{ \text{ все корни уравнения действительны } \}, \quad A_2 = \{ \text{ все корни уравнения положительны } \}.$$

Ответ: Событие A_1 реализуется при $p^2 \geq q$, следовательно $P(A_1) = \frac{S_1}{S}$, где $S = \frac{9}{2}$ — площадь ΔLMN, S_1 — площадь части ΔLMN, координаты (p, q) точек которой удовлетворяют неравенству $p^2 \geq q$. Имеем:

$$S_1 = 2\left(\int\limits_0^1 p^2\,dp + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{6}, \quad \Rightarrow \quad P(A_1) = \frac{7}{27}.$$

Событие A_2 реализуется при A_1 и $-p \pm \sqrt{p^2 - q} > 0$. Так как $q > 0$, то это выполнено для тех точек (p, q), реализующих A_1, у которых $p < 0$. Следовательно,

$$P(A_2) = \frac{P(A_1)}{2} = \frac{7}{54}.$$