

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МАГИСТРАТУРУ

1. Предел числовой последовательности и его свойства. Критерий Коши. Частичный предел, верхний и нижний пределы. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
2. Предел в точке функции одной переменной и его свойства. Эквивалентность двух определений предела по Коши и Гейне. Критерий Коши.
3. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывной функции на отрезке: теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши. Теорема об обратной функции. Равномерная непрерывность, теорема Кантора.
4. Производная в точке функции одной переменной и её свойства. Производная суперпозиции функций. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал функции. Дифференцирование обратной функции.
5. Производные высших порядков функции одной переменной. Формула Лейбница.
6. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя.
7. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.
8. Исследование функции одной переменной с помощью производных: монотонность, экстремумы, выпуклость, перегибы.
9. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Необходимые условия и достаточные условия дифференцируемости.
10. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением.
11. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимые условия и достаточные условия локального экстремума.
12. Условный экстремум функции нескольких переменных. Метод множителей Лагранжа, необходимые и достаточные условия условного экстремума.
13. Определённый интеграл. Критерий Дарбу интегрируемости функции. Свойства интеграла с переменным верхним пределом: непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона-Лейбница.
14. Несобственный интеграл. Абсолютная и условная сходимость. Критерий Коши, признаки сравнения и признак Дирихле сходимости несобственного интеграла.
15. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Критерий Коши, признаки сравнения, интегральный признак, признаки Лейбница и Дирихле сходимости числовых рядов.
16. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле равномерной сходимости.
17. Степенные ряды. Радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.
18. Криволинейные интегралы. Формула Грина.
19. Поверхностные интегралы. Формула Остроградского-Гаусса и формула Стокса.
20. Теорема Римана об осцилляции. Тригонометрический ряд Фурье. Условия сходимости ряда Фурье в точке. Условия равномерной сходимости ряда Фурье.
21. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
22. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами. Полные системы в нормированных пространствах.
23. Различные способы задания прямой и плоскости. Углы между прямыми и плоскостями. Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
24. Кривые второго порядка. Эллипс, парабола, гипербола и их свойства.

25. Аффинное преобразование плоскости и его свойства. Главные направления аффинного преобразования. Геометрический смысл знака и модуля определителя матрицы аффинного преобразования.
26. Ортогональное преобразование плоскости и его свойства. Представление аффинного преобразования суперпозицией ортогонального преобразования и двух сжатий.
27. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема Фредгольма. Общее решение линейной алгебраической системы уравнений.
28. Линейное преобразование конечномерного пространства, его матрица. Формула изменения матрицы линейного преобразования при замене базиса. Собственные векторы и собственные значения, их свойства.
29. Квадратичные формы и их приведение к каноническому виду.
30. Конечномерные евклидовы пространства. Матрица Грама. Сопряжённое линейное преобразование конечномерного евклидова пространства и его свойства.
31. Самосопряжённое линейное преобразование конечномерного евклидова пространства, свойства его собственных значений и собственных векторов.
32. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Метод разделения переменных. Методы понижения порядка уравнения, метод введения параметра.
33. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы уравнений с постоянными коэффициентами. Методы их решения.
34. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского и формула Лиувилля-Остроградского. Метод вариации постоянных.
35. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Необходимое условие слабого локального экстремума.
36. Положение равновесия автономной системы дифференциальных уравнений. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия.
37. Первые интегралы автономной системы дифференциальных уравнений. Теорема о числе независимых первых интегралов. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных, общее решение и задача Коши.
38. Вероятностное пространство. Независимые события. Теорема сложения. Условная вероятность. Полная система событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
39. Случайная величина и её функция распределения. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства.
40. Испытания Бернулли. Неравенство Чебышева и закон больших чисел.
41. Регулярные функции комплексного переменного. Интегральная формула Коши. Функции, регулярные в кольце. Ряд Лорана.
42. Вычет в изолированной особой точке. Вычисление интегралов при помощи вычетов. Лемма Жордана.
43. Регулярные ветви многозначных комплексных функций $\sqrt[n]{z}$ и $\text{Ln}(z)$ и их применение для вычисления интегралов.
44. Конформные отображения. Дробно-линейное отображение и его свойства. Функция Жуковского и её свойства.
45. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка двух переменных, гиперболических в заданной области. Метод характеристик поиска общего решения и решения задачи Коши.
46. Задача Коши для уравнения колебаний струны и одномерного уравнения теплопроводности. Формулы Даламбера и Пуассона.
47. Смешанная задача для уравнения колебаний полубесконечной струны. Условия согласования начальных и граничных условий.
48. Задача Коши для волнового уравнения в трёхмерном пространстве. Формула Кирхгофа.

49. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона для круга и шара.
50. Метод Фурье решения смешанной начально-краевой задачи для волнового уравнения и уравнения теплопроводности.
51. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным интегральным ядром.

Литература

1. Л. Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа.
2. С. М. Никольский. Курс математического анализа.
3. А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа.
4. Г. Н. Яковлев. Лекции по математическому анализу.
5. Г. Е. Иванов. Лекции по математическому анализу.
6. О. В. Бесов. Лекции по математическому анализу.
7. А. Ю. Петрович. Лекции по математическому анализу.
8. А. Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
9. В. И. Чехлов. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре.
10. Д. В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
11. Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
12. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений.
13. М. В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
14. В. К. Захаров, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков, Теория вероятностей.
15. В. П. Чистяков. Курс теории вероятностей.
16. Е. С. Половинкин. Курс лекций по теории функций комплексного переменного.
17. М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. Теория функций комплексного переменного.
18. В. С. Владимиров. Уравнения математической физики.
19. В. П. Михайлов. Лекции по уравнениям математической физики.
20. В. М. Уроев. Уравнения математической физики.
21. М. А. Шубин. Лекции об уравнениях математической физики.