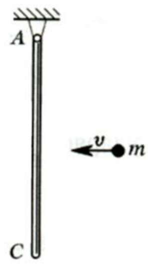
Министерство образования и науки Российской Федерации

ФГАОУ ВО «МФТИ (ГУ)»

Экзамен для переводников и восстанавливающихся на третий семестр

ДЕМОВАРИАНТ

1. На какую величину удлиняется однородный стержень, подвешенный за один конец, под действием собственного веса. Модуль Юнга материала стержня E, его длина L, площадь поперечного сечения S, масса M.
2. На горизонтальной поверхности стола стоит цилиндрический сосуд, в который налита вода до уровня H. На какой высоте h надо сделать небольшое отверстие в боковой стенке сосуда, чтобы струя воды встречала поверхность стола на максимальном расстоянии от сосуда? Воду считать идеальной жидкостью.
3. Однородный стержень длиной L подвешен за один конец и может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. Определить угол, на который отклонится стержень при попадании в него кусочка пластилина массой m. Считать, что он летит горизонтально со скоростью v и прилипает к середине стержня на расстоянии $L/2$ от точки A. Масса стержня $M = 6m$. Угол отклонения стержня меньше 90°.



4. В закрытом сосуде объемом V находятся азот и гелий при температуре T и давлении P. Массы газов равны. Молярные массы гелия и азота равны, соответственно, μ_1 и μ_2. Какое количество теплоты надо сообщить смеси газов, чтобы нагреть ее на ΔT?
5. Одноатомный идеальный газ находится под поршнем в адиабатически изолированном вертикально расположенном цилиндре. Наружное давление пренебрежимо мало. Температура газа T_0. Масса груза на поршне, определяющая давление газа, внезапно увеличилась вдвое. Насколько изменилась температура газа и возросла энтропия, приходящаяся на одну молекулу, после установления нового равновесного состояния?

Решение

1. Разобьём стержень на тонкие диски, толщиной dx. Рассмотрим диск, расположенный на расстоянии x от закреплённого конца. На него действует сила $F = \frac{M}{L}(L-x)g$, обусловленная весом части стержня, расположенной снизу от диска. Используя закон Гука, найдём изменение толщины диска dL_x:
   $F/S = E\frac{dL_x}{dx}$.
   Выполнив суммирование по всем дискам, получим величину удлинения стержня: $\Delta L = \int_0^L \frac{Fdx}{S\cdot E} = \frac{Mg}{LSE}\int_0^L (L-x)\,dx = \frac{MgL}{2SE}$.
2. По формуле Торричелли скорость истечения струи $v = \sqrt{2g(H-h)}$.
   Время полёта струи до стола $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. За это время вода окажется на расстоянии $L = L(h) = v\cdot t = 2\sqrt{h(H-h)}$. (1)
   Значение L максимально для $h = h_0$, для которого $L'_h(h_0) = 0$.
   Дифференцируя (1) по h, получим: $\frac{1}{\sqrt{h(H-h)}}(H-2h) = 0$.
   Таким образом, $h_0 = H/2$.
3. Из закона сохранения момента импульса: $I\omega = mv\frac{L}{2}$.
   Здесь $I = \frac{ML^2}{3} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}mL^2$. Следовательно, $\omega = \frac{2}{9}v/L$.
   Из закона сохранения энергии: $I\frac{\omega^2}{2} = (M+m)g\frac{L}{2}(1-cos\varphi) \Rightarrow$
   $$\Rightarrow \frac{9}{4}mL^2\left(\frac{2}{9}v/L\right)^2 = 7mgL(1-cos\varphi_{max})$$
   Ответ: $\cos\varphi_{max} = 1 - \frac{v^2}{63gL}$.
4. Для гелия $C_{1V} = \frac{3}{2}R$. Для азота $C_{2V} = \frac{5}{2}R$.
   $Q = \frac{m}{\mu_1}C_{1V}\Delta T + \frac{m}{\mu_2}C_{2V}\Delta T$. $PV = \left(\frac{m}{\mu_1} + \frac{m}{\mu_2}\right)RT$
   Из данных соотношений получаем: $Q = \frac{3\mu_2 + 5\mu_1}{\mu_2+\mu_1}\frac{PV}{2T}\Delta T$.
5. Из закона сохранения энергии: $\nu C_V(T - T_o) = 2mg(x_o - x)$. Здесь x это расстояние от дна до поршня. Из уравнения состояния идеального газа:
   $P_o\cdot(x_oS) = \nu RT_o$ и $P\cdot(xS) = \nu RT$.
   Здесь $P_oS = mg$ и $PS = 2mg$, т.к. масса груза полностью определяет давление газа.
   Следовательно, $mgx_o = \nu RT_o$ и $2mgx = \nu RT$. Подставляя эти соотношения в исходное равенство, получим $\nu\frac{3}{2}R(T - T_o) = 2\nu RT_o - \nu RT$. $\Rightarrow$ $T = \frac{7}{5}T_o$.
   Изменение энтропии идеального газа: $\Delta S = \nu C_P \ln\left(\frac{T}{T_o}\right) - \nu R\ln\left(\frac{P}{P_o}\right) \Rightarrow$
   $\Rightarrow \frac{\Delta S}{N} = \frac{5}{2}k\ln\frac{7}{5} - k\ln 2$.
   Здесь $N = \nu N_A$– число молекул газа, $C_P = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2}kN_A$.

Инструкция для проверяющих

За каждую задачу выставляется баллы согласно следующим критериям:

1	Задача решена верно: приведено обоснованное решение и даны ответы на все вопросы задачи. Возможно наличие арифметических ошибок, не влияющих на ход решения и не приводящих к ошибке в порядке величины.
0,8	Ход решения задачи в целом верен и получены ответы на все вопросы задачи, но решение содержит вычислительные или логические ошибки (арифметические ошибки, влияющие на порядок величины; ошибки в размерности; незначительные ошибки в выкладках; ошибка в знаке величины; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства и т.п.)
0,5	Задача не решена или решена частично, но все необходимые для решения физические законы сформулированы и корректно применены к задаче. При этом есть исходная система уравнений, выкладки начаты, но не доведены до конца, либо содержат грубые ошибки.
0,2	Задача не решена, но есть некоторые подвижки в её решении: использованы физические законы, на основе которых задача может быть решена, однако допущены ошибки на этапе составления исходной системы.
0	Задача не решена: основные физические законы перечислены не полностью или использованы законы, не имеющие отношения к задаче; подход к решению принципиально неверен; решение задачи не соответствует условию; попытки решить задачу не было.

Оценка за работу равна удвоенной сумме баллов по всем задачам, округленной до ближайшего целого (десятибалльная система).

Итоговая оценка за письменную работу:

10, 9, 8 баллов – отлично,

7, 6, 5 баллов – хорошо,

4, 3 балла – удовлетворительно,

2, 1, 0 баллов – неудовлетворительно.