

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА» ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МАГИСТРАТУРУ ПО КОНКУРСНЫМ ГРУППАМ ФПМИ

Данная программа относится к конкурсным группам:

1. Информатика и вычислительная техника
2. Прикладная математика и информатика

РЕГЛАМЕНТ ПРОВЕДЕНИЯ

Вступительное экзаменационное испытание (далее - вступительное испытание, экзамен) проводится **в устной форме** в дистанционном формате и предполагает беседу с экзаменационной комиссией.

Информация о времени и ссылке для подключения к устной части рассылается абитуриентам на электронный адрес, указанный в заявлении, **не позднее чем за 2 дня до начала экзамена**. Если абитуриент не получил ссылку или письмо с инструкциями, ему необходимо самостоятельно связаться с приёмной комиссией ФПМИ по почте fpmi@mipt.ru не позднее 14:00 дня, предшествующего дню проведения экзамена, (если экзамен проводится в один день) или до 18:00 первого дня (если экзамен распределён на несколько дней). Абитуриент, который не подключился к экзамену / не связался с комиссией в указанное время, считается **не явившимся на экзамен**.

Вступительное испытание проводится в дистанционном формате. Абитуриент должен обеспечить наличие исправного устройства с камерой, микрофоном и стабильным интернет-соединением. Во время экзамена запрещено пользоваться электронными устройствами, за исключением устройства, через которое производится подключение к экзамену для общения с комиссией.

Подключение на экзамен осуществляется за 5 минут до назначенного времени. При подключении необходимо предоставить оригинал документа, удостоверяющего личность

абитуриента, указанного в заявлении, с фамилией, именем, отчеством (при наличии) и фотографией.

СТРУКТУРА ЭКЗАМЕНА

Каждому абитуриенту во время экзамена будут заданы вопросы

1. из основного блока

Основной блок является единым для всех абитуриентов и включает фундаментальные темы программы вступительного испытания.

2. из двух блоков по выбору

До экзамена / в начале экзамена абитуриенту предлагается выбрать два тематических раздела из перечня доступных блоков по выбору. По каждому выбранному разделу экзаменаторы задают вопросы.

ПРАВИЛА ВЫСТАВЛЕНИЯ БАЛЛОВ

Итоговая оценка формируется на основании ответов абитуриента. При оценивании учитываются полнота и корректность ответа, глубина понимания материала и ключевых взаимосвязей, логичность, структурированность и аргументированность изложения, способность применять теоретические знания к практическим примерам.

Абитуриент может получить дополнительные баллы к итоговой оценке за ответ. Дополнительные 5 баллов к итоговой оценке за ответ на экзамене даёт рекомендация / согласие от руководства базовой кафедры / специализации ФПМИ о готовности принять абитуриента на обучение на кафедру / специализацию, полученное не позднее 1 июля. Абитуриент может получить не более 15 дополнительных баллов.

Общая сумма баллов за вступительное испытание не может превышать 40 баллов.

При поступлении на все конкурсные группы минимальное количество баллов для каждого вступительного испытания магистратуры устанавливается равным 15 баллам, что соответствует успешному прохождению вступительного испытания.

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА

ОСНОВНОЙ БЛОК

1.1. Математический анализ и линейная алгебра

1. Системы линейных уравнений. Прямоугольные матрицы. Приведение матриц и систем линейных уравнений к ступенчатому виду. Метод Гаусса.

2. Линейная зависимость и ранг. Линейная зависимость строк (столбцов). Основная лемма о линейной зависимости, базис и ранг системы строк (столбцов). Ранг матрицы. Критерий совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах рангов матриц. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.

3. Операции над матрицами и их свойства. Теорема о ранге произведения двух матриц. Определитель произведения квадратных матриц. Обратная матрица, ее явный вид (формула), способ выражения с помощью элементарных преобразований строк.

4. Векторное пространство, его базис и размерность. Преобразования координат в векторном пространстве. Подпространства как множества решений систем однородных линейных уравнений. Связь между размерностями суммы и пересечения двух подпространств. Линейная независимость подпространств. Базис и размерность прямой суммы подпространств.

5. Линейные отображения и линейные операторы. Линейные отображения, их запись в координатах. Образ и ядро линейного отображения, связь между их размерностями. Сопряженное пространство и сопряженные базисы. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.

6. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Собственные подпространства линейного оператора, их линейная независимость. Условие диагонализруемости оператора. Самосопряжённое линейное преобразование конечномерного евклидова пространства, свойства его собственных значений и собственных векторов.

7. Билинейные формы и их матрицы. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Метод Лагранжа приведение квадратичной формы к каноническому виду. Условие положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы. Критерий Сильвестра.

8. Ряды. Числовые и функциональные ряды. Признаки сходимости (Даламбера, Коши, интегральный, Лейбница). Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

9. Дифференцирование функций. Применение производной для нахождения экстремумов функций. Формула Тейлора.
10. Функции многих переменных. Частные производные. Градиент и его геометрический смысл. Метод градиентного спуска.
11. Поиск экстремумов функций от многих переменных. Условный экстремум функции нескольких переменных. Метод множителей Лагранжа, необходимые и достаточные условия условного экстремума.
12. Теорема Римана об осцилляции. Тригонометрический ряд Фурье. Условия сходимости ряда Фурье в точке. Условия равномерной сходимости ряда Фурье.
13. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

Литература

1. Иванов Г.Е. Лекции по математическому анализу: в 2 ч.: учеб. пособие – 3-е изд., испр. и доп. – М.: МФТИ, 2011
2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, 2025
3. Винберг Э.Б. Курс алгебры, 1999, 2001, Факториал, 2013,2017,2018, МЦНМО.
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру, 1977, Наука.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч. I, II, 2000, Физматлит.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, 1975, Наука.
7. Сборник задач по алгебре под редакцией Кострикина А.И, И. В. Аржанцев, В.А. Артамонов, Ю.А. Бахтурин и др. — МЦНМО Москва, 2009.
8. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. М.: Наука, 1981. 544 с. Часть II. М.: Наука, 1984. 640 с.
9. Кудрявцев, Л.Д., Курс математического анализа (в трех томах). Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Т. 3. Гармонический анализ. Москва, Изд-во Высшая школа, 1981.
10. Демидович, Б. П, Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Изд-во Аст, 2007.

1.2. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы

1. Определение вероятностного пространства, простейшие дискретные случаи (выборки с порядком и без него, с повторениями и без повторений), классическая вероятностная модель. Случайная величина, функция распределения.
2. Определение условной вероятности, формула полной вероятности, формула Байеса.
3. Определение математического ожидания, дисперсии, ковариации и корреляции, их свойства.
4. Независимость событий. Попарная независимость и независимость в совокупности.
5. Основные теоремы теории вероятностей. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.
6. Распределения. Стандартные дискретные и непрерывные распределения, их математические ожидания, дисперсии и свойства: биномиальное, равномерное, нормальное, пуассоновское, показательное, геометрическое. Характеристические функции распределений.
7. Определение случайного процесса. Система конечномерных распределений случайного процесса, ее свойства. Выборочное пространство случайного процесса.
8. Эргодические по математическому ожиданию (дисперсии, корреляционной функции) в среднем квадратичном случайные процессы. Критерий и достаточное условие эргодичности по математическому ожиданию в среднем квадратичном.
9. Марковский случайный процесс. Дискретная марковская цепь. Переходные вероятности, уравнения Колмогорова – Чепмена. Однородные дискретные марковские цепи.
10. Стандартные распределения в статистическом анализе данных. Распределение хи-квадрат (Пирсона). Случайная величина хи-квадрат как сумма квадратов независимых стандартных нормальных случайных величин. Распределения Фишера–Снедекора и Стьюдента.
11. Метод наименьших квадратов. Точечное оценивание векторного параметра. Система нормальных уравнений. Свойства оценки метода наименьших квадратов, теорема Гаусса–Маркова.
12. Выбор статистических гипотез. Простые и сложные статистические гипотезы. Статистическое решение и решающее правило. Рандомизированные решающие правила. Ошибки первого и второго рода, мощность статистического критерия. Наиболее мощный и равномерно наиболее мощный критерий.
13. Эмпирическая функция распределения. Статистическая гипотеза, выборка, критическая область гипотезы, уровень значимости. Теоремы о свойствах критериев согласия Колмогорова и Пирсона (хи-квадрат). Теорема Крамера (параметрический хи-квадрат). Применение

критериев для проверки согласия результатов опыта с теоретическими гипотезами о виде функции распределения, об однородности выборок, о независимости случайных величин. Использование статистических таблиц.

Литература

1. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей, УРСС. М.: 2001;
2. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей, 1970;
3. Ширяев, А. Н. Вероятность, Наука. М.: 1989;
4. Севастьянов Б. А., Курс теории вероятностей и математической статистики, Ч М.: Наука, 1982;
5. Севастьянов, Б. А., Чистяков, В. П., Зубков, А. М. Сборник задач по теории вероятностей, М.: Наука, 1986.

1.3. Введение в алгоритмы и структуры данных

1. Анализ алгоритмов. Понятие о сложности алгоритмов по времени и по памяти. Асимптотика, O-символика. Доказательство корректности алгоритмов.
2. Строки и операции над ними. Представление строк. Вычисление длины, конкатенация. Алгоритмы поиска подстроки в строке.
3. Сортировки. Нижняя теоретико-информационная оценка сложности задачи сортировки. Алгоритмы сортировки вставками, пузырьком, быстрая сортировка, сортировка слиянием. Оценка сложности.
4. Представление матриц и векторов. Алгоритмы умножения матриц и эффективные способы их реализации. Численные методы решения систем линейных уравнений.
5. Численное дифференцирование и интегрирование. Численные методы для решения систем дифференциальных уравнений.
6. Граф. Ориентированный граф. Представления графа. Обход графа в глубину и в ширину. Топологическая сортировка. Подсчет числа путей в орграфе.
7. Алгоритмы поиска кратчайших путей в графе. Алгоритм Дейкстры. Алгоритм Форда-Беллмана. Алгоритм Флойда. Алгоритм A*.
8. Структуры данных: стек, очередь, очередь с приоритетами, односвязные списки, двусвязные списки, куча, бинарное дерево, декартово дерево, суффиксный массив, суффиксный автомат, дерево отрезков, красно-чёрное дерево.

9. Объектно-ориентированное программирование: понятие объекта и класса объектов, инкапсуляция, наследование, полиморфизм, конструктор, деструктор, шаблоны, исключения и их обработка.
10. Понятие ускорения и масштабируемости параллельных программ. Вертикальная и горизонтальная масштабируемость. Закон Амдала. Оценка эффективности параллельных программ.
11. Понятие и архитектура GPU. Особенности разработки и оптимизации программ на GPU. Платформа CUDA. Типы памяти и управление памятью в CUDA.
12. Модель вычислений MapReduce. Пары ключ-значение в реализациях MapReduce. Основные стадии вычислений и дополнительные элементы модели. Итеративные вычисления на больших объемах данных.
13. Теорема Фишера-Линч-Патерсона (FLP-теорема) без доказательства, CAP-теорема (без док-ва) и их применение. Распределенные системы хранения конфигураций. Выбор процесс-лидера или машины-лидера в распределенных системах. Алгоритм консенсуса.

Литература

1. Шень А. Программирование: теоремы и задачи. МЦНМО, 2007;
2. Вирт Н. Алгоритмы и структуры данных. Изд-во Невский диалект, 2005;
3. Керниган Б., Ритчи Д. Язык программирования С. Изд-во Вильямс, 2008;
4. Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. – 3-е изд. – Москва: Вильямс, 2013. – 1328 с. – ISBN 978-5-8459-1794-2.
5. Скиена, С. Алгоритмы. Руководство по разработке / С. Скиена. – 2-е изд. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2014. – 720 с. – ISBN 978-5-9775-0560-4.
6. Окулов, С. М. Программирование в алгоритмах / С. М. Окулов. – 6-е изд. – Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. – 383 с. – ISBN 978-5-9963-3872-6.

1.4. Введение в искусственный интеллект

1. Основные понятия (выборка, модель, функция потерь) и постановки задач машинного обучения. Примеры прикладных задач.
2. Задача регрессии. Линейная регрессия. Аналитическое решение МНК. Метрики качества регрессии: MSE, MAE, R2.
3. Регуляризация: L1 и L2. Причины использования, свойства, интерпретация.

4. Задача классификации: метрики качества классификации. Метод максимального правдоподобия.
5. Логистическая регрессия.
6. Задача кластеризации: k-means, DBSCAN. Метрики качества кластеризации.
7. Задача понижения размерности: PCA, T-SNE.
8. Оценка качества моделей. Переобучение. Отложенная выборка, ее недостатки. Оценка полного скользящего контроля. Кросс-валидация. Leave-one-out.
9. Градиентные методы оптимизации в машинном обучении. Оптимизатор ADAM.
10. Понятие нейронной сети. Многослойный перцептрон. Метод обратного распространения ошибки. Функции активации.
11. Рекуррентные нейронные сети. Обратное распространение через слой RNN. 12. Проблема исчезающего градиента и ее решение. LSTM.
13. Сверточные нейронные сети. Свертка матриц. Сверточный слой, обратное распространение через него.

Литература

1. Mohammed J. Zaki, Wagner Meira Jr. Data Mining and Analysis. Fundamental Concepts and Algorithms. Cambridge University Press, 2014
(<http://www.dataminingbook.info/pmwiki.php/Main/BookDownload>);
2. Boris Mirkin. Core Concepts in Data Analysis: Summarization, Correlation, Visualization, 2010 3 Boyd, Vandenberghe. Convex Optimization
4. Dekking, F.M., Kraaikamp, C., Lопuhaä, H.P., Meester, L.E., A Modern Introduction to Probability and Statistics.
5. К.В. Воронцов. Машинное обучение, курс лекций
http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%9C%D0%B0%D1%88%D0%B8%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D0%B1%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%28%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81_%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9%2C_%D0%9A.%D0%92.%D0%92%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%BD%D1%86%D0%BE%D0%B2%29

БЛОКИ ПО ВЫБОРУ

- 2.1. Уравнения математической физики и вычислительная математика

1. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка. Канонические формы.
2. Задача Коши для гиперболических уравнений в частных производных второго порядка. Метод характеристик. Формулы Даламбера, Пуассона, Коши.
3. Начально-краевая задача для линейных уравнений параболического типа. Метод Фурье. Принцип максимума.
4. Краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Принцип максимума.
5. Дискретизация, обусловленность задачи, устойчивость вычислительного метода, его экономичность, устранимые и неустраиваемые погрешности вычислений. Элементарная теория погрешности.
6. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Каноническая и операторная форма записи. Содержательный пример – разностная схема для уравнения Лапласа. Согласованные нормы векторов и матриц в линейных нормированных пространствах. Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы (метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, метод прогонки для систем специального вида). Итерационные методы (метод простой итерации, идея и формулы чебышевских итерационных методов, другие итерационные методы).
7. Переопределенные системы линейных алгебраических уравнений. Задачи, приводящие к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений. Обобщенное решение системы, метод наименьших квадратов.
8. Численное решение систем нелинейных алгебраических уравнений. Сжимающее отображение, метод простой итерации, его геометрическая интерпретация, метод релаксации. Метод Ньютона. Порядок сходимости итерационного метода.
9. Интерполяция функций. Конечные и разделенные разности. Постановка задачи интерполяции. Обобщенный полином. Полиномиальная интерполяция; существование и единственность интерполяционного полинома, остаточный член полинома, формы записи Лагранжа и Ньютона. Обусловленность интерполяционного процесса. Константы Лебега. Чебышевские узлы интерполяции. Тригонометрическая интерполяция. Кусочно-многочленная интерполяция. Сплайн-интерполяция.
10. Численное интегрирование. Квадратурные формулы Ньютона–Котеса (прямоугольников, средних, трапеций, Симпсона), их погрешность. Формулы Гаусса.
11. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Метод сеток. Простейшие разностные схемы: явная и неявная схемы

Эйлера, схема с центральной разностью. Определения сходимости, аппроксимации, устойчивости. Теорема Рунге–Кууты о сходимости. Методы Рунге–Кууты, их устойчивость.

12. Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Аппроксимация и устойчивость разностных схем. Теорема о сходимости решения разностной задачи к решению дифференциальной.

13. Численные методы решения задач, описываемых уравнениями в частных производных гиперболического типа. Уравнение переноса, волновое уравнение, системы уравнений гиперболического типа.

14. Численные методы решения линейных и нелинейных уравнений в частных производных параболического типа. Явные и неявные разностные схемы для уравнения теплопроводности. Многомерные по пространству параболические уравнения. Метод расщепления. Метод переменных направлений.

15. Численные методы решения уравнений эллиптического типа. Разностная схема «крест». Аппроксимация и устойчивость разностных схем. Методы решения возникающих линейных систем уравнений большой размерности. Метод простой итерации. Чебышевские итерационные методы.

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.
3. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2001, 302с.
4. Рябенкий В.С. Введение в вычислительную математику. — М.: Наука–Физматлит, 1994. — 335 с. 2-е изд. М.: Физматлит, 2000. — 296 с.
5. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. — М.: Изд-во МФТИ, 1994. — 526 с.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
7. Лобанов А.И., Петров И.Б. Вычислительные методы для анализа моделей сложных динамических систем. Часть 1. — М.: МФТИ, 2000. — 168 с.
8. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике. 2-е изд. — М.: Изд-во МФТИ, 2000. — 224 с.
9. Сборник задач для упражнений по курсу Основы вычислительной математики / Под ред. Рябенкого В.С. — М.: МФТИ, 1988.

10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Г. Численные методы. 8-е изд. —М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. — 624 с.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
12. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. 13. Иосида К. Функциональный анализ.

2.2. Дискретный анализ и основы высшей алгебры

1. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, дополнение. Тождества: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, законы де Моргана.
2. Понятие соответствия. Обозначения. Инъективные и сюръективные соответствия. Обратные соответствия. Определяющие свойства соответствий, обратных к инъективным и к сюръективным. Пример соответствия, которое обладает двумя из следующих трёх свойств, но не обладает третьим (инъективность, сюръективность, отображение).
3. Понятие отображения. Инъекции и сюръекции. Биекции. Взаимно однозначные отображения. Утверждение о том, что соответствие является биекцией тогда и только тогда, когда оно само и обратное к нему являются отображениями.
4. Предмет комбинаторики. Размещения, перестановки и сочетания. Доказательство формул для чисел размещения и сочетания с повторениями и без повторений. Бином Ньютона. Полиномиальный коэффициент и полиномиальная формула.
5. Логические методы комбинаторного анализа. Принцип включений-исключений. Задача о числе беспорядков, задача о числе сюръективных отображений конечных множеств.
6. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общая формула для соотношения n -го порядка. Формула для чисел Фибоначчи. Формальные степенные ряды, операции над ними. Пример вычисления суммы и произведения. Формальные степенные ряды. Определение обратного ряда. Пример деления в столбик. Числа Фибоначчи и их производящая функция. Числа Каталана. Производящая функция для чисел Каталана.
7. Числа Стирлинга первого рода, рекуррентное соотношение для них. Биномиальные коэффициенты, производящая функция для них, основные комбинаторные тождества. Полиномиальные коэффициенты, производящая функция для них, основные комбинаторные тождества. Число разбиений n объектов на m классов. Числа Стирлинга второго рода.

Рекуррентное соотношение для $S(n, k)$. Числа Белла разбиений множества на непересекающиеся подмножества, рекуррентное соотношение для чисел Белла.

8. Определение графа. Неориентированные и ориентированные графы. Изоморфные графы. Полные ориентированные и неориентированные графы. Локальные степени вершин. Число вершин нечетной степени в конечном графе. Машинное представление графов. Матрица инцидентности. Матрица смежности (вершин). Список пар, список инцидентности. Пути (маршруты, цепи) в графе, простые пути, циклы. Связность. Теорема о связности двух вершин, имеющих нечетную локальную степень. Максимальное число ребер в графе с n вершинами и k -связными компонентами. Деревья. Связанность любых двух вершин дерева единственным простым путем. Изображение дерева. Концевые (висячие) вершины и концевые (висячие) ребра дерева. Поиск в глубину и в ширину. Теорема о числе различных деревьев с данными n вершинами.

9. Эйлеровы пути и циклы, теорема о существовании эйлеровых путей и циклов в графе. Алгоритм построения эйлеровых циклов. Гамильтоновы пути и циклы. Пути, имеющие тип цикла. Достаточное условие для того, чтобы полный простой путь имел тип цикла. Связь между наличием в связном графе гамильтоновых циклов и длиной максимальных простых путей в нем.

10. Нахождение кратчайших путей в ориентированном графе от фиксированной вершины (случай неотрицательных весов ребер).

11. Алгебраические структуры. Бинарные операции. Полугруппы и моноиды. Группы. Примеры групп. Группа перестановок (симметрическая группа). Теорема Кэли. Подгруппы. Порождающие или образующие элементы группы.

12. Левые и правые смежные классы группы по подгруппе. Индекс подгруппы в группе. Порядок элемента группы. Циклические группы. Теорема Лагранжа. Сопряженные элементы и сопряженные подгруппы. Нормальные делители. Факторгруппа. Изоморфизмы, автоморфизмы и гомоморфизмы групп. Ядро гомоморфизма. Внутренние автоморфизмы. Теорема о гомоморфизме групп.

13. Кольца. Примеры колец. Кольцо целых чисел. Кольцо многочленов над кольцом (полем). Кольца классов вычетов в кольце целых чисел и кольце многочленов. Подкольцо. Обратимые элементы кольца, группа обратимых элементов кольца, делители нуля. Левые, правые и двусторонние идеалы. Главные идеалы. Максимальные и простые идеалы. Кольца классов вычетов. Факторкольцо. Теорема о гомоморфизме колец.

14. Деление с остатком в кольцах целых чисел и многочленов над полем. Евклидовы кольца. Идеалы в евклидовых кольцах. Кольца главных идеалов. Факториальность колец главных идеалов.

15. Поля. Примеры полей. Поле классов вычетов. Характеристика поля. Простое подполе. Конечные и алгебраические расширения полей. Поле разложения. Конечные поля.

Литература

1. Райгородский, А.М. Вероятность и алгебра в комбинаторике / А.М. Райгородский. - М.: Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО), 2015.
2. Журавлев Ю.И., Флеров Ю.А. Дискретный анализ. Ч. 1: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 1999.
3. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Под ред. С.В. Яблонского, О.В. Лупанова. – Т. 1. – М.: Наука, 1974.
4. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979.
5. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. – М.: Мир, 1990.
6. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. – М.: Мир, 1998.
7. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988.
8. Уилсон Р. Дж. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977.
9. Алгебра: Определения, теоремы, формулы: [учебник для вузов] / Б. Л. Ван дер Варден; пер. с нем. А. А. Бельского.— 3-е изд., стереотип. — СПб.: Лань, 2004.— 624 с.
10. Высшая алгебра, Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра/А. П. Мишина, И. В. Проскуряков, -М., Наука, 1965
11. Высшая алгебра, учебник / Л. Я. Окунев. — СПб., Лань, 2009.— URL: <https://e.lanbook.com/book/289> (дата обращения: 27.01.2021). - Полный текст (Режим доступа: из сети МФТИ / Удаленный доступ)
12. Высшая алгебра, Электронная версия печатной публикации / Л. Я. Окунев. — Санкт-Петербург, Лань, 2021

2.3. Основы математической логики и теоретическая информатика

1. Булевы функции. Табличное задание функций. Элементарные функции, их свойства, таблица операций, коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и другие свойства элементарных функций. Задание булевых функций пропозициональными формулами.

Тавтологии, противоречия, выполнимые и опровержимые формулы. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы, задание с их помощью произвольной булевой функции. Многочлены Жегалкина и представление с их помощью произвольной булевой функции.

2. Функциональная полнота систем булевых функций алгебры. Замкнутые классы. Пять предполных замкнутых классов P_0, P_1, L, S, M . Критерий функциональной полноты систем булевых функций (теорема Поста). Лемма о несамодвойственной функции. Лемма о немонотонной функции. Лемма о нелинейной функции. Базисы множества булевых функций.

3. Метод формальных теорий. Основные понятия исчисления высказываний. Выражения, формулы и аксиомы. Схемы аксиом и правило вывода. Вывод в исчислении высказываний. Теорема дедукции. Теорема о полноте. Непротиворечивость исчисления высказываний и независимость его схем аксиом.

4. Языки первого порядка. Сигнатура, термы, атомарные формулы, произвольные формулы. Интерпретация сигнатуры и определение значения формулы. Общезначимые формулы: определение и примеры. Приведение к предварённой нормальной форме. Выразимость предикатов формулами: примеры.

5. Машины Тьюринга и вычисление на них. Вычислимые функции, разрешимые и перечислимые множества, их свойства. Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки.

6. Формальные языки и их представление. Грамматики. Типы грамматик по Хомскому и их свойства. Связь машин Тьюринга и грамматик типа 0.

7. Конечные автоматы. Регулярные множества и выражения. Детерминированные и недетерминированные конечные автоматы.

8. Эквивалентность классов языков, определяемых конечными автоматами, регулярными выражениями и праволинейными грамматиками.

9. Магазинные автоматы. Контекстно-свободные грамматики и автоматы с магазинной памятью. Детерминированные и недетерминированные магазинные автоматы.

10. Детерминированные машины Тьюринга и класс P . Замкнутость класса P относительно теоретико-множественных операций, конкатенации и итерации.

11. Недетерминированные вычисления и класс NP . Определения через недетерминированную машину Тьюринга и через проверку сертификатов, их эквивалентность. Замкнутость класса NP относительно объединения, пересечения, конкатенации и итерации. Класс $coNP$.

12. Полиномиальная сводимость и NP -полные задачи. Теорема Кука-Левина. Основные NP -полные задачи (выполнимость, 3-выполнимость, вершинное покрытие, клика, независимое

множество, 3-раскраска, гамильтонов цикл, задача о рюкзаке и др.). Методы доказательства NP-полноты.

13. Задачи с числовыми параметрами. Псевдополиномиальная сводимость. Сильная NP-полнота (задачи: упорядочение работ внутри интервалов, многопроцессорное расписание без прерываний, коммивояжер, упаковка в контейнеры).

14. Вероятностные алгоритмы: метод Монте-Карло, вероятностные тесты простоты, проверка многочленов на равенство. Вероятностные классы: BPP, RP, coRP, ZPP. Уменьшение ошибки при помощи амплификации.

Литература

1. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 1. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 1999.
2. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть
3. Вычислимые функции. – М.: МЦНМО, 1999. 3. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
4. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2002.

2.3. Основы программирования

1. Структуры данных: стек, очередь, очередь с приоритетами, деки, односвязные списки, двусвязные списки, куча, бинарное дерево, декартово дерево, хэш-таблицы, двоичный контейнер (Range Minimum Query, описание и примеры применения), суффиксный массив, суффиксный автомат, дерево отрезков, дерево Фенвика, красно-чёрное дерево.

2. Язык программирования C++: препроцессор, ветвления, циклы, функции, массивы, арифметика указателей, рекурсия, структуры, объединения (union), стандартная библиотека C, библиотека STL, boost.

3. Язык программирования Java: виртуальная машина Java, управление памятью, передача примитивных типов в функции, передача ссылочных типов в функции, проблема изменения ссылки внутри подпрограммы, статические инициализаторы, удаление неиспользуемых объектов и метод finalize, проблема деструкторов для сложно устроенных объектов, сборка мусора

4. Язык программирования Python: компиляция и интерпретация кода, особенности ООП (области видимости кода, конструкторы и деструкторы). Многопоточность в Python, GIL и noGIL-подход. Основные библиотеки работы с данными (numpy, scipy, pandas).

5. Архитектура ЭВМ: виды архитектура ЭВМ (Гарвардская, фон Неймановская), набор команд процессора (CISC, RISC, VLIW), кэш и ускорение работы с его использованием, соглашения о вызове, представление целых чисел, дополнительный код, представление чисел с плавающей точкой, язык ассемблера, реверс-инжиниринг, средства отладки и инструментирования (valgrind, AddressSanitizer, strace, gdb), статические и динамические библиотеки.

6. Операционные системы: классификация операционных систем, операционные системы реального времени, понятие процесса, виды процессов, файлы, структура файловой системы, управление памятью (одиночное распределение, страничное, сегментное, сегментно-страничное, свопинг), взаимодействие процессов, IPC (пайпы, сигналы, очереди сообщений, сокеты, семафоры, разделяемая память), пользователи и группы, мандатное управление доступом, виды виртуализации.

7. Объектно-ориентированное программирование: понятие объекта и класса объектов, инкапсуляция, наследование, полиморфизм, конструктор, деструктор, шаблоны, исключения и их обработка.

8. Сети: модель ISO/OSI, протокол IPv4 (понятие IP-адреса, маски подсети), протокол IPv6, системные вызовы для поддержки сети в ОС (socket, bind, listen, access, connect, read, write, send, recv...), протоколы TCP и UDP, сериализация / десериализация, основы языка HTML, основные теги, система доменных имён, понятие латентности сети, RTT, удаленный вызов процедур.

9. Базы данных: классификация БД по модели данных, реляционная теория, атрибуты, кортежи, домены, отношения, первичные и внешние ключи, нормальные формы, реляционные операции, агрегаты, группировки, аналитические функции, физическое устройство БД (страницы данных), основы языка SQL (запросы SELECT, INSERT, UPDATE).

10. Информационная безопасность: основные концепции, угрозы, модели рисков, законодательство. Криптография: симметричное / асимметричное шифрование, хеш-функции, ЭЦП, PKI. Случайные числа: генераторы (ГПСЧ) и их криптографическая значимость. Уязвимости и атаки: инъекции (SQL, XSS), переполнения, RCE, фишинг, DDoS. Защита приложений: безопасная разработка, обработка входных данных, хранение паролей, контроль доступа. Сетевая безопасность: межсетевые экраны (Firewall), IDS/IPS, VPN, TLS/SSL. Виды сетевых атак: man of the middle, Spoofing и Flooding

11. Компьютерная безопасность: Безопасность ОС: модели контроля доступа (DAC, MAC, RBAC); защита памяти и выполнения (ASLR, DEP, canaries); мандатный контроль и изоляция (SELinux, AppArmor). Вредоносное ПО: Классификация угроз (вирусы, черви, трояны, ransomware); способы распространения и сокрытия; методы обнаружения (сигнатурный, поведенческий, песочница). Мониторинг и обнаружение вторжений: централизованный сбор логов (syslog, auditd); анализ и корреляция событий; обнаружение аномалий в системе и сети. Реагирование на инциденты и устойчивость: планы аварийного восстановления (DRP) и их тестирование; стратегии резервного копирования и восстановления; разбор инцидентов и работа над ошибками. Облачная безопасность: модель общей ответственности и ключевые риски; безопасность данных (шифрование, управление ключами); управление доступом (IAM) и изоляция (мультиотенантность).

12. Разработка ПО и управление проектами: процессы и методологии разработки (Waterfall, V-model, Итеративная, Agile). Agile-фреймворки (Scrum, Kanban). Специфические методологии (экстремальное программирование, Lean). DevOps принципы. Анализ и управление требованиями (функциональные и нефункциональные требования, Use-case анализ). Архитектурные стили и подходы (многослойная архитектура, микросервисная архитектура, гексагональная, Clean Architecture, Domain-Driven Design). Фундаментальные принципы (SOLID, GoF). Системы контроля версий (cvs, svn, mercurial, git). Техники и инструменты рефакторинга, улучшение читаемости и снижение сложности кода

13. Управление качеством ПО: методологии и уровни тестирования (unit, integration, system), техники тестирования (black/white/grey-box). Автоматизация (фреймворки, регрессия, нагрузка, покрытие кода). Спецификация требований к ПО (SRS). Управление изменениями

требований. Управление качеством и процессы (метрики кода, статический анализ, code review), технический долг, CI/CD. API, документирование кода. Профилирование, оптимизация (память, CPU), масштабируемость, Безопасная разработка (SDLC), threat modeling, SAST/DAST, сканирование зависимостей.

Литература

1. Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. – 3-е изд. – Москва: Вильямс, 2013. – 1328 с. – ISBN 978-5-8459-1794-2.
2. Скиена, С. Алгоритмы. Руководство по разработке / С. Скиена. – 2-е изд. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2014. – 720 с. – ISBN 978-5-9775-0560-4.
3. Окулов, С. М. Программирование в алгоритмах / С. М. Окулов. – 6-е изд. – Москва БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. – 383 с. – ISBN 978-5-9963-3872-6.
4. Страуструп, Б. Язык программирования С++ / Б. Страуструп. – 4-е изд. – Москва: Бином-Пресс, 2011. – 1136 с. – ISBN 978-5-9518-0415-3.
5. Мейерс, С. Эффективное использование С++. 55 верных советов улучшить структуру и код ваших программ / С. Мейерс. – 3-е изд. – Москва: ДМК Пресс, 2014. – 304 с. – ISBN 978-5-97060-121-5.
6. Хорстманн, К. Java. Библиотека профессионала. Том 1. Основы / К. Хорстманн. – 11-е изд. – Москва: Диалектика, 2020. – 864 с. – ISBN 978-5-907144-70-5
7. Таненбаум, Э. Архитектура компьютера / Э. Таненбаум, Т. Остин. – 6-е изд. – Санкт-Петербург: Питер, 2020. – 816 с. – ISBN 978-5-4461-0664-9.
8. Таненбаум, Э. Современные операционные системы / Э. Таненбаум, Х. Бос. – 4-е изд. – Санкт-Петербург: Питер, 2021. – 1120 с. – ISBN 978-5-4461-0911-4.
9. Гамма, Э. Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования / Э. Гамма, Р. Хелм, Р. Джонсон, Д. Влиссидес. – Санкт-Петербург: Питер, 2020. – 366 с. – ISBN 978-5-4461-1367-8.
10. Таненбаум, Э. Компьютерные сети / Э. Таненбаум, Д. Уэзеролл. – 5-е изд. – Санкт-Петербург: Питер, 2021. – 960 с. – ISBN 978-5-4461-1387-6
11. Коннолли, Т. Базы данных: проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика / Т. Коннолли, К. Бегг. – 4-е изд. – Москва: Вильямс, 2016. – 1440 с. – ISBN 978-5-8459-2021-8.
12. Шнайер, Б. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си / Б. Шнайер. – 2-е изд. – Москва: Триумф, 2002. – 816 с. – ISBN 5-89392-055-4. 13.

Соммервилл, И. Инженерия программного обеспечения / И. Соммервилл. – 10-е изд. – Москва: Вильямс, 2019. – 752 с. – ISBN 978-5-8459-1411-8.

2.4. Выпуклый анализ, теория оптимизации и методы оптимального управления

1. Определение и топологические свойства выпуклых множеств. Операция с выпуклыми множествами. Выпуклые комбинации. Теоремы Каратеодори, Радона, Хелли.
2. Опорные функции и их свойства.
3. Выпуклые функции и их свойства. Критерий выпуклости дифференцируемой функции. 4. Преобразование Лежандра – Юнга – Фенхеля. Теорема Фенхеля – Моро.
5. Субдифференциал выпуклой функции и его связь с производной по направлению.
6. Теорема Моро-Рокафеллара. Теорема Дубовицкого – Милитюна о субдифференциале максимума.
7. Теорема Куна-Таккера для задач выпуклого программирования.
8. Теорема двойственности для задач линейного программирования.
9. Задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Первые интегралы уравнения Эйлера. Условия Вейерштрасса, Лежандра и Якоби. Уравнение Якоби. Условия Вейерштрасса–Эрдмана.
10. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина.
11. Точечно-множественные отображения и их свойства (замкнутость, полунепрерывность сверху и снизу). Теорема Какутани.
12. Невыпуклая оптимизация. Примеры трудных задач невыпуклой оптимизации. Условие Поляка-Лоясиевича, глобальная сходимост ь градиентного спуска для невыпуклых задач. 13. Переход к двойственной задаче. Уменьшение размерности задачи в случае выпуклости и сепарабельности функционала.
14. Метод условного градиента (Франк-Вульфа). Примеры множеств, на которых легко минимизировать линейный функционал. Скорость сходимости.
15. Метод Ньютона. Аффинная инвариантность. Самосогласованные функции.
16. Метод множителей Лагранжа, условия ККТ, условие Слейтера.
17. Стохастическая оптимизация. Минибатчинг и распараллеливание.
18. Решение обратных задач методом градиентного спуска. Учёт ограничений с помощью ввода множителей Лагранжа.

Литература

1. Гасников А.В. Современные методы оптимизации. 2-е издание, 2021.
2. Воронцова Е.В. Выпуклая оптимизация, 2021.
3. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Едиториал УРСС, 2003, 174 с.
4. Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал Пресс, 2006, 144 с.
5. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. — Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

2.5. Продвинутое методы искусственного интеллекта

1. Метод оптимизации с импульсом и его интерпретация как физической динамики. Отличия Nesterov Momentum. Ограничения и нестабильности методов.
2. Определение batch size. Влияние размера batch size и величины градиентного шума на обобщение. Связь batch size и learning rate. Размер batch size при fine-tuning LLM. Влияние batch size на обобщение в задачах классификации, генерации и RL.
3. Shortcut solutions в больших моделях и методы их обнаружения. Методы интерпретации моделей для выявления shortcut solutions.
4. Механизмы внимания в Transformer. Causal и bidirectional attention: различия и области применения. Causal attention: масштабирование и потоковая генерация.
5. Архитектура Transformer decoder-only: особенности и сравнение с encoder–decoder.
6. Методы оптимизации обучения LLM: FlashAttention, FSDP, ZeRO, tensor parallelism.
7. Качество обучающих данных. Проблемы несбалансированных и неоднородных обучающих корпусов. Distribution shift.
8. Феномен Catastrophic forgetting в LLM. Причины и последствия возникновения при fine-tuning. Методы предотвращения.
9. Отличия LoRA и QLoRA.
10. Обучение с подкреплением. Уравнения Беллмана и их свойства, ошибки критика и их влияние на обучение актора в Actor–Critic, отличия off-policy и on-policy методов и проблемы стабильности off-policy.
11. Галлюцинации в LLM. Методы уменьшения галлюцинаций и проверки фактической точности в LLM.

Литература

1. Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, Aaron Courville. Deep Learning. MIT Press, 2016.
2. Richard S. Sutton, Andrew G. Barto. Reinforcement Learning: An Introduction. MIT Press, 2nd ed., 2018.
3. A. Vaswani et al. "Attention is All You Need." NeurIPS, 2017.
4. Sebastian Ruder. "An Overview of Gradient Descent Optimization Algorithms." arXiv:1609.04747.
5. Christiano et al. "Deep Reinforcement Learning from Human Preferences." NeurIPS 2017.

2.6. Управление продуктом в сфере ИТ

1. Целевая аудитория. Сегментация клиентов. ABCDX-сегментация.
2. Оценка объема рынка. TAM, SAM, SOM.
3. Управление каналами продаж. Виды маркетинговой коммуникации.
4. Воронки продаж, конверсии, методика AIDA.
5. Понятие критического пути в планировании проекта. Понятие критической цепи и методика управления проектами CCPM.
6. Гибкие методологии управления проектами. Экстремальное программирование (XP) и SCRUM. Основные принципы, терминология, ценности и практики.
7. Проектные роли в методологиях SCRUM и XP.
8. Планирование в SCRUM. Планирование бэклога, планирование спринта. Использование planning poker, использование burndown chart.
9. Техника user story mapping для планирования спринтов.
10. HADI-цикл. Формулирование и проверка бизнес-гипотез.
11. Ценностное предложение.
12. Бизнес-модель. Структура шаблона бизнес-модели Lean Canvas. Структура шаблона бизнес-модели Business model canvas. Виды (архетипы) бизнес-моделей.
13. Пользовательские исследования: качественные и количественные. Проблемные интервью. Решенческие интервью.
14. Customer Journey Map как инструмент представления результатов пользовательских исследований.
15. Разработка и пользовательское тестирование прототипов продукта. MVP. Виды MVP.
16. Бизнес-план. Структура и порядок составления.
17. Финансовое планирование. Расчет финансовых показателей проекта: ROI, NPV, IRR, PP. Временная стоимость денег и дисконтирование денежных потоков.

18. Юнит-экономика. Основные показатели юнит-экономики и порядок их расчета. Основное уравнение юнит-экономики.
19. Налогообложение бизнеса в РФ. Основные виды юридических лиц и режимы налогообложения для них.

Литература:

1. Maurya A. Running Lean. 3rd ed. — Sebastopol: O'Reilly Media, 2017.
2. Калинин Е. Фокусируйся. — Москва: Манн, Иванов и Фербер, 2022.
3. Детмер У. Теория ограничений Голдратта: системный подход к непрерывному совершенствованию. — Москва: Альпина Паблишер, 2020.
4. Blank S. The Four Steps to the Epiphany. — Pescadero: K&S Ranch, 2013.
5. Ries E. The Lean Startup. — New York: Crown Business, 2011.
6. Fitzpatrick R. The Mom Test. — London: Robfitz Ltd., 2014.
7. Alvarez C. Lean Customer Development. — Sebastopol: O'Reilly Media, 2014.
8. Osterwalder A., Pigneur Y., Bernarda G., Smith A. Value Proposition Design. — Hoboken: Wiley, 2014.
9. Ханин Д. Юнит-экономика. — Москва: Альпина Паблишер, 2022.
10. Moore G. Crossing the Chasm. 3rd ed. — New York: HarperBusiness, 2014.
11. Osterwalder A., Pigneur Y. Business Model Generation. — Hoboken: Wiley, 2010.
12. Project Management Institute. A Guide to the Project Management Body of Knowledge (PMBOK Guide). 8th ed. — Newtown Square: Project Management Institute, 2024.
13. Leach L. Critical Chain Project Management. 2nd ed. — Boston: Artech House, 2005.
14. Beck K. Extreme Programming Explained. 2nd ed. — Boston: Addison-Wesley, 2004.
15. Schwaber K., Sutherland J. The Scrum Guide. 2020. — [S.l.]: Scrum.org, 2020.
16. Wiegers K., Beatty J. Software Requirements. 3rd ed. — Redmond: Microsoft Press, 2013.
17. Левенчук А. И. Системное мышление 2024. — Москва: RSD, 2024.
18. Maurya A. Scaling Lean. — New York: Penguin Random House, 2016.
19. Kotler Ph., Armstrong G. Principles of Marketing. 17th ed. — Harlow: Pearson, 2017.
20. Lambin J.-J., Chumpitaz R., Schuiling I. Market-Driven Management. — London: Palgrave Macmillan, 2012.