

# ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

## 1. ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА ФИВТ

### Прикладная математика и информатика

1. Задача сортировки массива. Пример алгоритма, решающего эту задачу за  $O(N \log(N))$ . Доказательство факта, что любой алгоритм сортировки в среднем тратит время не меньше  $\theta(N \log(N))$ . Алгоритм Quick Sort, его сложность и оптимизации.
2. Алгоритм Heap Sort: описание лежащих в основе структур данных, доказательство оценки сложности.
3. Структура данных хеш-таблица: определение, интерфейс, сложность выполнения основных операций. Способы разрешения конфликтов. Пример реализации функции добавления нового элемента для открытой адресации.
4. Структура данных красно-чёрное дерево. Что такое сбалансированность дерева и как её можно достигнуть. Сбалансированность красно-чёрных деревьев. Оценки времени поиска, добавления и удаления элементов. Пример реализации добавления элементов, включая вращения.
5. Структура данных двоичный контейнер (Range Minimum Query, RMQ): описание и примеры применения. Алгоритм построения двоичного контейнера, алгоритм выполнения запроса "минимальный элемент в промежутке  $[i, j]$ ", алгоритм выполнения запроса "10 минимальных элементов в промежутке  $[i, j]$ ". Решение задачи RMQ с помощью таблицы.
6. Задача о наименьшем общем предке (Least Common Ancestor, LCA). Сведение к задаче RMQ. Сведение RMQ к LCA.
7. Жадные алгоритмы. Пример жадного алгоритма с оценкой качества получаемого решения.
8. Динамическое программирование. Общий метод и пример применения с оценкой сложности.
9. Дискретная и непрерывная задачи о рюкзаке.
10. Задача о наибольшей общей подпоследовательности (Longest Common Subsequence, LCS). Расстояние Левенштейна.
11. Алгоритмы обхода графа в глубину и в ширину.
12. Система непересекающихся множеств. Алгоритм Крускала.
13. Алгоритмы Флойда и Дейкстры для поиска кратчайших путей в графе.
14. Кучи. Бинарная, биномиальная, фибоначчиева. Алгоритмы для работы с кучей в STL. Очередь с приоритетами и реализация в STL.
15. Поиск подстроки в тексте. Поиск общей подстроки максимальной длины двух текстов. Суффиксное дерево. Построение за линейное время.
16. Суффиксный массив. Построение за  $O(N \log N)$ . Линейный алгоритм.
17. Инфиксная и постфиксная формы записи выражений. Перевод из одной системы в другую.
18. Средства объектно-ориентированного программирования в C++.
19. Шаблоны в C++.
20. Основные классы-контейнеры и алгоритмы стандартной библиотеки STL.
21. Обработка исключений в C++.
22. Представление целых чисел(знаковых/беззнаковых) в памяти компьютера. Представление вещественных чисел.
23. Логическая архитектура компьютера: фон Неймана, гарвардская.
24. Средства распараллеливания/ускорения работы процессора: конвейер, кэш, суперскалярная архитектура.

25. Задачи операционной системы: понятие вычислительной системы, управление физическими/логическими ресурсами, планирование. Типы операционных систем: пакетные, разделения времени, реального времени, сетевые.
26. Понятие процесса, виды процессов.
27. Файловые системы: FAT, NTFS, UFS, FFS. Сравнение.
28. Управление памятью: одиночное распределение, страничное, сегментное, сегментно-страничное, свопинг
29. Взаимодействие процессов, IPC: пайпы, сигналы, очереди сообщений, сокеты, семафоры, разделяемая память.
30. Сеть: Уровни ISO/OSI, TCP/IP, Передача данных. Системные вызовы для поддержки сети в ОС (socket, bind, listen, access, connect, read, write, send, recv...).
31. Базы данных. Классификация БД по модели данных. Реляционная теория. Атрибуты, кортежи, домены, отношения. Первичные и внешние ключи.
32. Проектирование БД. Функциональные зависимости. Нормальные формы. Декомпозиция.
33. Реляционные операции. Агрегаты, группировки, аналитические функции.
34. Физическое устройство БД. Страницы данных. Индексы.
35. Транзакции, ACID. Атомарность и долговечность. ARIES, логирование.
36. Конкурентный доступ. Согласованность и изолированность. Виды изоляции.
37. Определение функционального программирования. Абстракция и декомпозиция при функциональном подходе. Декларативное программирование. Плюсы и минусы.
38. Лямбда-исчисление. Редукция. Функции нескольких аргументов. Каррирование.
39. Виды рекурсии. Рекурсивные структуры данных. Функциональные структуры данных.
40. Нормальный и аппликативный порядок редукции. Ленивые и энергичные вычисления. Механизмы вызова и проблема разделения. Теорема Чёрча-Россера и теорема стандартизации. Экстенциональность. Слабая заголовочная нормальная форма.
41. Средства объектно-ориентированного программирования в языке Java.
42. Виртуальная машина Java. Управление памятью. Передача примитивных типов в функции. Передача ссылочных типов в функции. Проблема изменения ссылки внутри подпрограммы. Статические инициализаторы. Удаление неиспользуемых объектов и метод finalize. Проблема деструкторов для сложно устроенных объектов. Сборка мусора.
43. Сетевое программирование на Java. Сериализация/десериализация.
44. Коллекции и массивы в Java.
45. Моделирование при помощи UML. Статическое представление модели. Диаграммы классов. Виды отношений: ассоциация, зависимость, абстракция, реализация и другие. Ограничения. Экземпляры классов. Варианты использования (прецеденты). Выделение классов. Метод Аббота, карточки Класс-Контракт-Коллеги (CRC), диаграммы устойчивости.
46. Динамическое представление модели. Поведение. Основные определения. Структурированный классификатор. Композит и часть. Диаграммы внутренней структуры. Представление взаимодействия. Диаграммы взаимодействия и коммуникации. Роль, спецификация выполнения, сообщение, кооперация. Описание сценариев вариантов использования. Представление деятельности. Представление о сетях Петри. Виды действий, разделы. Контекст выполнения. Поток управления и данных (объектные). Представление процессов на диаграммах деятельности. Представление конечных автоматов. Диаграммы схем состояний. Состояние, переход, псевдосостояния, составные состояния. Семантика конечных автоматов в UML. Обработка событий, переход по завершении. Моделирование жизненного цикла классификатора с помощью конечных автоматов. Пакеты. Управление моделью.
47. Методы структурного проектирования. Виды методов: сверху-вниз, снизу-вверх, итеративные. Модульность. Принципы разделения системы на модули. Метрики

- качества модульной структуры. Метод постепенного уточнения, структурные диаграммы (STD). Диаграммы потоков данных (DFD). Метод структурного программирования Джексона (JSP).
48. Паттерны проектирования. Структурные, создания и паттерны поведения. Примеры паттернов. Строитель. Посетитель. Шаблон метода. Фасад. Мост. Метрики качества объектно-ориентированной структуры. Эвристики GRASP.
  49. Приближение функций, заданных на дискретном множестве. Существование и единственность алгебраического интерполяционного полинома. Интерполяционный полином в форме Лагранжа и в форме Чебышева.
  50. Численное интегрирование. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса и оценка их погрешности. Квадратурные формулы Гаусса.
  51. Решение СЛАУ. Обусловленность. Метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, метод прогонки. LU-разложение.
  52. Итерационные методы решения СЛАУ. Метод простых итераций, необходимое, достаточное условия его сходимости.
  53. Методы численного решения уравнений и систем нелинейных уравнений. Принцип сжимающих отображений. Метод простых итераций. Метод Ньютона.
  54. Численные методы решения ОДУ. Методы Рунге-Кутты.

#### **Литература:**

1. Винокуров Н.А. Ворожцов А.В. Практика и теория программирования. В 2-х книгах. – М.: Физматкнига, 2008.
2. Эккель Б., Философия С++. Введение в стандартный С++. – СПб.: Питер, 2004.
3. Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е изд. – М.: «Вильямс», 2006.
4. Керниган Б.У., Ритчи Д.М. Язык программирования С, 2-е издание. – М.: «Вильямс», 2006.
5. Мейерс С. Эффективное использование STL. – СПб.: Питер, 2002.
6. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Структуры данных и алгоритмы. – М.: «Вильямс», 2000.
7. Бентли Дж. Жемчужины программирования, 2-е изд. – СПб.: Питер, 2002.
8. Вирт Н., Алгоритмы + структуры данных = программа. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 406 с.
9. Солтер Н.А., Клепер С.Д. С++ для профессионалов. М.: «Вильямс», 2006.
10. Шилдт Г. Полный справочник по С++, 4-е изд. – М.: «Вильямс», 2006
11. Седжвик Р. Фундаментальные алгоритмы на С++, 3-е изд. – СПб: ООО «ДиаСофт», 2002.
12. Фаулер М. UML. Основы. Третье издание. (любой издатель)
13. Ларман К. Применение UML 2.0 и шаблонов проектирования. Введение в объектно-ориентированный анализ, проектирование и итеративную разработку. М.: «Вильямс», 2009. - 736 с.
14. Гамма Э., Хелм Р., Джонсон Р. Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования, любое издание.
15. Pressman R. Software Engineering: A Practitioner's Approach, 6th Ed. - McGraw Hill, 2005
16. Орлов С.А. Технологии разработки программного обеспечения. Разработка сложных программных систем. Для студентов и преподавателей высших учебных заведений. – СПб: Питер, 2004. – 527 с.
17. Басс Л., Клементс П., Кацман Р. Архитектура программного обеспечения на практике. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2006, 576 с.
18. Амблер С. Гибкие Технологии: Экстремальное Программирование и Унифицированный Процесс Разработки. – СПб.: Питер, 2005.

19. Мейер Б. Объектно-ориентированное конструирование программных систем. – М.: Русская Редакция, 2005.
20. Liskov B., Guttag J. Program Development in Java: Abstraction, Specification and Object-Oriented Design. - Addison-Wesley, 2000.
21. Эккель Б. Философия Java. – СПб.: Питер, 2009.
22. Робачевский А.М. Операционная система UNIX – СПб.:БХВ-Петербург, 2010.
23. Карпов В.Е., Коньков К.А. Операционные системы – М.: ИНТУИТ.РУ «Интернет-Университет Информационных Технологий», 2005.
24. Таненбаум Э.С. Современные Операционные системы, 2-е изд. – СПб.:Питер, 2002.
25. Стивенс У.С. Разработка сетевых приложений. – СПб.:Питер, 2002.
26. Стивенс У.С., Раго С.А. UNIX. Профессиональное программирование (Professional Programming UNIX environment). – СПб.: Символ-Плюс, 2007
27. Дейт К. Дж Введение в системы баз данных. 8-е изд. М.: «Вильямс», 2005
28. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. — М.: Наука–Физматлит, 1994. — 335 с. 2-е изд. М.: Физматлит, 2000. — 296 с.
29. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. — М.: Изд-во МФТИ, 1994. — 526 с.
30. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
31. Лобанов А.И., Петров И.Б. Вычислительные методы для анализа моделей сложных динамических систем. Часть 1. — М.: Изд-во МФТИ, 2000. — 168 с.
32. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике. 2-е изд. — М.: Изд-во МФТИ, 2000. — 224 с.
33. Сошников Д.В. Функциональное программирование — М.: ИНТУИТ.РУ «Интернет-Университет Информационных Технологий», 2010.

## 2. ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА ФУПМ

### **Математическое моделирование, вычислительная математика и физика**

55. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка. Канонические формы.
56. Задача Коши для гиперболических уравнений в частных производных второго порядка. Метод характеристик. Формулы Даламбера, Пуассона, Коши.
57. Начально-краевая задача для линейных уравнений параболического типа. Метод Фурье. Принцип максимума.
58. Краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Принцип максимума.
59. Дискретизация, обусловленность задачи, устойчивость вычислительного метода, его экономичность, устранимые и неустраиваемые погрешности вычислений. Элементарная теория погрешности.
60. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Каноническая и операторная форма записи. Содержательный пример – разностная схема для уравнения Лапласа. Согласованные нормы векторов и матриц в линейных нормированных пространствах. Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы (метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, метод прогонки для систем специального вида). Итерационные методы (метод простой итерации, идея и формулы чебышевских итерационных методов, другие итерационные методы).
61. Переопределенные системы линейных алгебраических уравнений. Задачи, приводящие к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений. Обобщенное решение системы, метод наименьших квадратов.

62. Численное решение систем нелинейных алгебраических уравнений. Сжимающее отображение, метод простой итерации, его геометрическая интерпретация, метод релаксации. Метод Ньютона. Порядок сходимости итерационного метода.
63. Интерполяция функций. Конечные и разделенные разности. Постановка задачи интерполяции. Обобщенный полином. Полиномиальная интерполяция; существование и единственность интерполяционного полинома, остаточный член полинома, формы записи Лагранжа и Ньютона. Обусловленность интерполяционного процесса. Константы Лебега. Чебышевские узлы интерполяции. Тригонометрическая интерполяция. Кусочно-многочленная интерполяция. Сплайн-интерполяция.
64. Численное интегрирование. Квадратурные формулы Ньютона–Котеса (прямоугольников, средних, трапеций, Симпсона), их погрешность. Формулы Гаусса.
65. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Метод сеток. Простейшие разностные схемы: явная и неявная схемы Эйлера, схема с центральной разностью. Определения сходимости, аппроксимации, устойчивости. Теорема Рябенского–Филлипова о сходимости. Методы Рунге–Кутты, их устойчивость.
66. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Линейная краевая задача. Метод численного построения общего решения. Метод прогонки. Метод стрельбы. Метод квазилинеаризации (метод Ньютона) для численного решения нелинейных краевых задач. Краевая задача на собственные значения.
67. Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Аппроксимация и устойчивость разностных схем. Теорема о сходимости решения разностной задачи к решению дифференциальной. Необходимое условие сходимости Куранта–Фридрихса–Леви. Приемы исследования разностных задач на устойчивость. Принцип максимума, спектральный признак устойчивости, принцип замороженных коэффициентов. Другие подходы к исследованию устойчивости.
68. Численные методы решения задач, описываемых уравнениями в частных производных гиперболического типа. Уравнение переноса, волновое уравнение, системы уравнений гиперболического типа.
69. Численные методы решения линейных и нелинейных уравнений в частных производных параболического типа. Явные и неявные разностные схемы для уравнения теплопроводности. Многомерные по пространству параболические уравнения. Метод расщепления. Метод переменных направлений.
70. Численные методы решения уравнений эллиптического типа. Разностная схема «крест». Аппроксимация и устойчивость разностных схем. Методы решения возникающих линейных систем уравнений большой размерности. Метод простой итерации. Чебышевские итерационные методы.
71. Метрические и топологические пространства. Примеры:  $l_p$ ,  $C_p[a, b]$  ( $p \geq 1$ ),  $C_n[a, b]$ . Неравенства Гельдера и Минковского.
72. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Принцип сжимающих отображений.
73. Компактность и центрированные системы замкнутых множеств. Теорема Арцела–Асколи.
74. Норма оператора. Полнота нормированного пространства  $L(E_1, E_2)$ . Теорема Банаха–Штейнгауза.
75. Теорема Хана–Банаха.
76. Слабая сходимость. Теорема Банаха–Алооглу.
77. Интеграл Лебега (определение и основные свойства). Теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, Фату, Беппо Леви.
78. Характеристическое свойство евклидовых пространств (4.2). Банаховы и гильбертовы пространства. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Теорема Рисса о линейных функционалах в гильбертовом пространстве.

## Литература:

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.
3. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М.:МЦНМО, 2001, 302с.
4. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. — М.: Наука–Физматлит, 1994. — 335 с. 2-е изд. М.: Физматлит, 2000. — 296 с.
5. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. — М.: Изд-во МФТИ, 1994. — 526 с.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
7. Лобанов А.И., Петров И.Б. Вычислительные методы для анализа моделей сложных динамических систем. Часть 1. — М.: МФТИ, 2000. — 168 с.
8. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике. 2-е изд. — М.: Изд-во МФТИ, 2000. — 224 с.
9. Сборник задач для упражнений по курсу Основы вычислительной математики / Под ред. Рябенского В.С. — М.: МФТИ, 1988.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Г. Численные методы. 8-е изд. —М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. — 624 с.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
12. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа.
13. Иосида К. Функциональный анализ.

## Компьютерные технологии и интеллектуальный анализ данных

1. Функции алгебры логики. Табличное задание функций. Элементарные функции, их свойства, таблица операций, коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность элементарных функций. Формулы и функции алгебры логики. Теоремы о разложении функций по одной и нескольким переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.
2. Функциональная полнота систем функций алгебры логики. Замкнутые классы. Пять предполных замкнутых классов  $T_0, T_1, L, S, M$ . Теорема о функции, двойственной к суперпозиции. Критерий функциональной полноты систем функций алгебры логики (теорема Поста). Основная лемма. Лемма о несамодвойственной функции. Лемма о немонотонной функции. Лемма о нелинейной функции. Следствия из критерия полноты.
3. Предмет комбинаторики. Комбинаторные задачи о числе функций, слов в алфавите и размещений объектов по ячейкам при различных ограничениях  $(mn, [m]n, [m]n, [m]n/n!, Pn)$ . Числа Стирлинга первого рода, рекуррентное соотношение для них. Биномиальные коэффициенты, производящая функция для них, основные комбинаторные тождества. Полиномиальные коэффициенты, производящая функция для них, основные комбинаторные тождества. Число разбиений  $n$  объектов на  $m$  классов. Числа Стирлинга второго рода. Рекуррентное соотношение для  $S(n, k)$  Разложение степени  $x^n$  в базисе  $\{[x]_k\}$ . Числа Белла разбиений множества на непересекающиеся подмножества, рекуррентное соотношение для чисел Белла.
4. Логические методы комбинаторного анализа. Принцип включений-исключений. Задача о числе беспорядков, задача о числе сюръективных отображений конечных множеств. Системы представителей множеств. Системы различных представителей (с.р.п.). Необходимое и достаточное условие существования с.р.п. Алгоритм построения с.р.п. для заданной системы множеств. Системы одновременных представителей.
5. Определение графа. Неориентированные и ориентированные графы. Изоморфные графы. Полные ориентированные и неориентированные графы. Локальные степени вершин. Число вершин нечетной степени в конечном графе. Машинное представление графов. Матрица инцидентий. Матрица смежности (вершин). Список пар, список

инцидентности. Пути (маршруты, цепи) в графе, простые пути, циклы. Связность. Теорема о связности двух вершин, имеющих нечетную локальную степень. Максимальное число ребер в графе с  $n$  вершинами и  $k$ -связными компонентами. Деревья. Связанность любых двух вершин дерева единственным простым путем. Изображение дерева. Концевые (висячие) вершины и концевые (висячие) ребра дерева. Поиск в глубину и в ширину. Теорема о числе различных деревьев с данными  $n$  вершинами.

6. Эйлеровы пути и циклы, теорема о существовании эйлеровых путей и циклов в графе. Алгоритм построения эйлеровых циклов. Гамильтоновы пути и циклы. Пути, имеющие тип цикла. Достаточное условие для того, чтобы полный простой путь имел тип цикла. Связь между наличием в связном графе гамильтоновых циклов и длиной максимальных простых путей в нем.
7. Нахождение кратчайших путей в ориентированном графе от фиксированной вершины (случай неотрицательных весов ребер).
8. Алгебраические структуры. Бинарные операции. Полугруппы и моноиды. Группы. Примеры групп. Группа перестановок (симметрическая группа). Теорема Келли. Подгруппы. Порождающие или образующие элементы группы.
9. Левые и правые смежные классы группы по подгруппе. Индекс подгруппы в группе. Порядок элемента группы. Циклические группы. Теорема Лагранжа. Сопряженные элементы и сопряженные подгруппы. Нормальные делители. Факторгруппа. Изоморфизмы, автоморфизмы и гомоморфизмы групп. Ядро гомоморфизма. Внутренние автоморфизмы. Теорема о гомоморфизме групп.
10. Кольца. Примеры колец. Кольцо целых чисел. Кольцо многочленов над кольцом (полем). Кольца классов вычетов в кольце целых чисел и кольце многочленов. Подкольцо. Обратимые элементы кольца, группа обратимых элементов кольца, делители нуля. Левые, правые и двусторонние идеалы. Главные идеалы. Максимальные и простые идеалы. Кольца классов вычетов. Идеалы в кольцах многочленов. Факторкольцо. Теорема о гомоморфизме колец.
11. Деление с остатком в кольцах целых чисел и многочленов над кольцом целых чисел. Евклидовы кольца. Идеалы в евклидовых кольцах. Кольца главных идеалов. Факториальность колец главных идеалов.
12. Поля. Примеры полей. Поле классов вычетов. Характеристика поля. Простое подполе. Конечные и алгебраические расширения полей. Поле разложения. Конечные поля.
13. Метод формальных теорий. Основные понятия исчисления высказываний. Выражения, формулы и аксиомы. Схемы аксиом и правило вывода. Вывод в исчислении высказываний. Теорема дедукции. Теорема о полноте. Непротиворечивость исчисления высказываний и независимость его схем аксиом.
14. Основные понятия теорий первого порядка: кванторы, термы, формулы, свободные и связанные вхождения переменных в формулы. Интерпретации. Выполнимость и истинность. Модели. Логически общезначимые формулы. Схемы аксиом и правила вывода исчисления предикатов. Непротиворечивость исчисления предикатов. Теорема дедукции. Теорема Геделя о полноте (без доказательства).
15. Необходимость уточнения понятия алгоритма. Примеры алгоритмов. Машины Тьюринга (МТ) и их основные свойства. Примеры МТ. Нумерация МТ. Операции над МТ. Понятие нормального алгоритма Маркова. Примеры. Марковские вычисления. Эквивалентность определений алгоритма по Тьюрингу и Маркову.
16. Понятие вычислимости. Примитивно-рекурсивные функции. Тезис Чёрча.
17. Алгоритмически неразрешимые проблемы: распознавание применимости, самоприменимости и переводимости.
18. Проблема тождества слов в полугруппах. Разрешимые случаи. Примеры. Неразрешимость проблемы тождества слов в полугруппах.

19. Языки и их представление. Грамматики. Типы грамматик по Хомскому и их свойства. Связь машин Тьюринга и грамматик типа 0.
20. Конечные автоматы. Регулярные множества и выражения. Детерминированные и недетерминированные конечные автоматы
21. Эквивалентность классов языков, определяемых конечными автоматами, регулярными выражениями и праволинейными грамматиками.
  - 21.1. Детерминированные машины Тьюринга и класс  $P$ . Рекурсивные и рекурсивно перечислимые языки.
  - 21.2. Недетерминированные вычисления и класс  $NP$ .
  - 21.3. Полиномиальная сводимость и  $NP$ -полные задачи. Теорема Кука. Семь основных  $NP$ -полных задач (*выполнимость, 3-выполнимость, трехмерное сочетание, вершинное покрытие, клика, гамильтонов цикл, разбиение*). Методы доказательства  $NP$ -полноты.
  - 21.4. Задачи с числовыми параметрами. Псевдополиномиальная сводимость. Сильная  $NP$ -полнота (задачи: *упорядочение работ внутри интервалов, многопроцессорное расписание без прерываний, коммивояжер, упаковка в контейнеры*).
  - 21.5. Псевдополиномиальные алгоритмы (задачи: *разбиение, рюкзак, многопроцессорное расписание без прерываний при фиксированном числе процессоров, упаковка в контейнеры при фиксированном числе контейнеров*).
  - 21.6. Сводимость по Тьюрингу и  $NP$ -трудные задачи (задача  $K$ -е по порядку множество).  $NP$ -эквивалентные задачи (*оптимизационные варианты семи основных  $NP$ -полных задач, оптимизационная задача коммивояжера*).
22. Алгоритмы сортировки и их сложность.
23. Магазинные автоматы. Контекстно-свободные грамматики и автоматы с магазинной памятью. Детерминированные и недетерминированные магазинные автоматы.

#### Литература:

1. Журавлев Ю.И., Флеров Ю.А. Дискретный анализ. Ч. 1: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 1999.
2. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Под ред. С.В. Яблонского, О.В. Лупанова. – Т. 1. – М.: Наука, 1974.
3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979.
4. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. – М.: Мир, 1990.
5. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. – М.: Мир, 1998.
6. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988.
7. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. – М.: МГУ, 1972.
8. Уилсон Р. Дж. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977.
9. Харрари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973.
10. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970.
11. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001.
12. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
13. Ван-дер-Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
14. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.
15. Трахтенберг Б.А. Алгоритмы и вычислительные автоматы. М.: Сов. Радио, 1974.
16. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
17. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.
18. Ловас, М. Пламмер. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. М.: Мир, 1998.
19. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы. Построение и анализ. М.: МЦНМО, 1999.

## Методы системного анализа в экономике и управлении

1. Определение и топологические свойства выпуклых множеств. Операция с выпуклыми множествами.
2. Выпуклые комбинации. Теоремы Каратеодори, Радона, Хелли.
3. Теоремы отделимости.
4. Опорные функции и их свойства.
5. Выпуклые функции и их свойства. Критерий выпуклости дифференцируемой функции.
6. Преобразование Лежандра – Юнга – Фенхеля. Теорема Фенхеля – Моро.
7. Субдифференциал выпуклой функции и его связь с производной по направлению.
8. Теорема Моро-Рокафеллара. Теорема Дубовицкого –Милитюна о субдифференциале максимума.
9. Теорема Куна-Таккера для задач выпуклого программирования.
10. Теорема двойственности для задач линейного программирования.
11. Задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Первые интегралы уравнения Эйлера. Условия Вейерштрасса, Лежандра и Якоби. Уравнение Якоби. Условия Вейерштрасса–Эрдмана.
12. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина.
13. Модель межотраслевого баланса В.В.Леонтьева. Продуктивные матрицы. Критерии продуктивности.
14. Неотрицательная обратимость матрицы  $(xE-A)$  и ее связь с продуктивностью. Теорема о разложении резольвенты.
15. Теорема Фробениуса-Перрона. Оценка темпов сбалансированного экономического роста. Свойства числа Фробениуса-Перрона.
16. Неразложимые матрицы. Свойства числа Фробениуса-Перрона неразложимой матрицы.
17. Теорема об устойчивых матрицах. Теорема Моришимы о магистрали. Экономическая интерпретация вектора Фробениуса - Перрона.
18. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна. Оценка стоимости опциона.
19. Теорема Брауэра.
20. Точечно-множественные отображения и их свойства (замкнутость, полунепрерывность сверху и снизу). Теорема Какутани.
21. Лемма Гейла-Никайдо-Дебре.
22. Игры в нормальной форме. Понятия равновесия по Нэшу и оптимальности по Парето. Примеры игр: «дилемма заключенного», «семейный спор», «чет-нечет». Равновесие по Штаккельбергу. Смешанные стратегии. Теорема фон Неймана о равновесии в смешанных стратегиях в матричной игре.
23. Теорема Нэша. Модель олигополии Курно.
24. Модель Эрроу-Дебре. Конкурентное равновесие и закон Вальраса. Модификация функций спроса и предложения. Сведение вопроса о существовании конкурентного равновесия к вариационному неравенству. Замкнутость отображений спроса и предложения. Теорема Эрроу-Дебре.
25. Первая и вторая теоремы теории благосостояния.

## Литература:

1. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Едиториал УРСС, 2003, 174 с.
2. Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал Пресс, 2006, 144 с.
3. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972, 518с.
4. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984, 294с.

5. Экланд И. Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983, 248с.
6. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985, 200с.
7. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988, 264с.
8. Маршалл А., Олкин И. Неравенства, теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983, 574с.
9. Мельников А.В. Стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. М.: ТВП, 1997, 125с.