ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x-i}\,dx.$$

2. Функция $u\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-x\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0,\quad x\in\mathbb{R},\quad u\in\mathbb{R},$$

$$u(0,y)=y^2,\quad u\in\mathbb{R}.$$

Найти функцию $u(x,y)$ и вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{\gamma}u(x,y)\,dy,$$

где кривая γ — это граница области $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ \begin{smallmatrix}x^2+y^2<1,\\ x>0,\ y>0\end{smallmatrix}\right\}$, ориентированная против часовой стрелки.

3. Найти минимум функционала

$$J(u)=\int\limits_0^1\frac{\exp(u'(x))}{x+1}\,dx,\quad u\in C^2[0,1],$$

на множестве $M=\left\{\ u\in C^2[0,1]\ \middle|\ u(0)=0,\ u(1)=0\ \right\}$, и указать экстремаль, доставляющую минимум.

4. Три лыжника независимо спускаются с горы, каждый с вероятностью $\frac{1}{3}$ может упасть, а упав дважды, сходит с трассы. Найти вероятность того, что хотя бы один лыжник дойдёт до финиша, если известно, что каждый из них хоть раз упал.

5. Решить задачу Коши

$$(2x+1)u''(x)-u'(x)=0,\quad x>0,$$

$$u(0)=0,\quad u'(0)=1.$$

6. Решить уравнение

$$u(x) = \int\limits_0^x u(t)\,dt + \exp(x), \quad x \geq 0.$$

7. Решить задачу Коши для уравнения Шрёдингера

$$i\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(0,x) = \exp(ix), \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = \Delta u(t,x,y), \quad t > 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(0,x,y) = \exp(-x^2)\sin y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

9. Решить задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y,z)}{\partial t^2} = \Delta u(t,x,y,z), \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$u(0,x,y,z) = \operatorname{th}(x - y + z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\frac{\partial u(0,x,y,z)}{\partial t} = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

10. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 < 1,$$

$$u(x,y)\Big|_{x^2+y^2=1} = xy^2.$$